Родионов *А*.И. К динамике удара абсолютно твёрдого шара по упругому полупространству / *А*.И. Родионов, К.А. Матвеев // Научный вестник НГТУ – Новосибирск: Изд.-во НГТУ, 2012. - № 1(46).- С.93-108.
УДК 517, 531, 624.

Научный вестник НГТУ. - 2012. - №1(46)

К динамике удара абсолютно твёрдого шара по упругому полупространству*

А.И. РОДИОНОВ. К.А МАТВЕЕВ

Рассмотрен удар деформируемых тел как процесс. Обозначены трудности создания динамической теории удара. Получена замкнутая система уравнений с вариационным условием, описывающая процесс удара абсолютно твёрдого шара по упругому полупространству. Решение строилось в изотермическом приближении в рамках динамической контактной задачи классической теории упругости и теоретической механики с вариационным условием и отличалось от решений Г. Герца и Н.А. Кильчевского. При этом не учитывалось влияние сопутствующих удару электрических, тепловых и акустических процессов.

Ключевые слова: удар как процесс, абсолютно твёрдый шар, упругое полупространство, неклассическая вариационная контактная задача теории упругости и динамики твёрдого тела, волновые поля напряжений и деформаций, контактные давления и сила, представление Лямэ, динамические потенциалы, граничные условия смешанного типа, тензор Грина упругого полупространства, динамическое уравнение удара, кинематическое уравнение удара как уравнение интегро-дифференциальной связи, функционал Кильчевского, функции сравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В начале XXI века состояние науки, изучающей удар деформируемых тел в диапазоне скоростей до 100 м/с, таково, что на *сегодня имеются лишь элементы теории соударения тел в этом диапазоне скоростей*. Отсутствие общей теории объясняется следующими причинами. В настоящее время с очевидностью можно утверждать, что *удар отличается от статического или быстрого нагружения тем, что силы, действующие на поверхностях контакта тел, прикладываются и удаляются в очень короткие промежутки времени, в результате чего возникают волны напряжений и деформаций, которые затем распространяются по телам.* Кроме того, *соударение сопровождается соответствующим внедрением в точках контакта*, исключая случай плоского соударения стержней равного поперечного сечения. В результате *в окрестности трансформирующейся поверхности контакта возникают сложные поля напряжений и деформаций, которые изменяются в каждой точке со временем и распространяются в области тел, еще свободные от напряжений и деформаций.* Эти поля определяются в точках тела наложением продольных и поперечных волн. Вдоль поверхностей распространяются поверхностные волны, сильно влияющие на распределение энергии при ударе. Картина усложняется из-за многократных отражений от границ тел, из-за влияния других физических факторов: тепловых, звуковых, электрических на процесс соударения тел.

Таким образом, *формирование ударного импульса*, его распространение по соударяемым телам, движение самих тел как целого, передача энергии в процессе удара, рассеяние ударного импульса на неоднородностях *определяются как упругими и пластическими свойствами соударяемых тел, их твердостью, так и характером и особенностями волновых процессов***,** *протекающих в среде каждого твердого тела.* Все это приводит к тому, что *последовательное математическое описание процесса удара становится весьма затруднительно, и все попытки связаны с большими аналитическими и вычислительными трудностями.*

Сегодня мы *вынуждены идти по пути создания очень частных моделей удара, зачастую весьма грубых.* Однако *грубые*, упрощенные *модели* бывают *достаточно адекватны потребностям инженерной практики, хотя и не описывают правильно процесс с точки*

**Получена 8 февраля 2011г.*

зрения механики и физики. Именно в силу этой адекватности они часто используются при решении практических задач. С учётом этого теоретически строгое корректное решение даже простейших задач удара представляет большой теоретический и практический интерес.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Выведем уравнения удара, описывающие ударное взаимодействие абсолютно твердого шара радиуса R и массы m, имеющего начальную скорость соударения V_0, и изотропного упругого полупространства плотности ρ, с продольной c_1, и поперечной c_2 скоростями звука. Задача поставлена и решается в изотермическом приближении без учета влияния сопутствующих электрических, тепловых, акустических процессов, исходя из основных положений, уравнений и методов классической механики, динамической теории упругости и вариационного исчисления. Рассматриваемая именно как динамическая неклассическая вариационная контактная задача механики и теории упругости она отличается в постановке, решении и следствиям от квазистатических задач Г.Герца и Н.А.Кильчевского [1,2].

Пусть, как представлено на рис.1, на упругое полупространство налетает по нормали абсолютно твердый шар, обладающий изначально количеством движения $p=mV_0$. Выведем систему из динамического (ДУУ) и кинематического уравнений (КУУ), описывающих процесс удара. Для этого рассмотрим совместное решение задачи о движении абсолютно твердого шара под действием контактной силы - реакции идеальной связи [1] со стороны упругого полупространства, - и задачи динамической теории упругости о генерации волн с нестационарной поверхности контакта и их распространении по упругому полупространству. Для однозначного решения исходной задачи потребуем выполнения вариационного условия, полученного Н.А.Кильчевским [1]. Из соображений удобства рассмотрим постановку и решение этих задач отдельно.

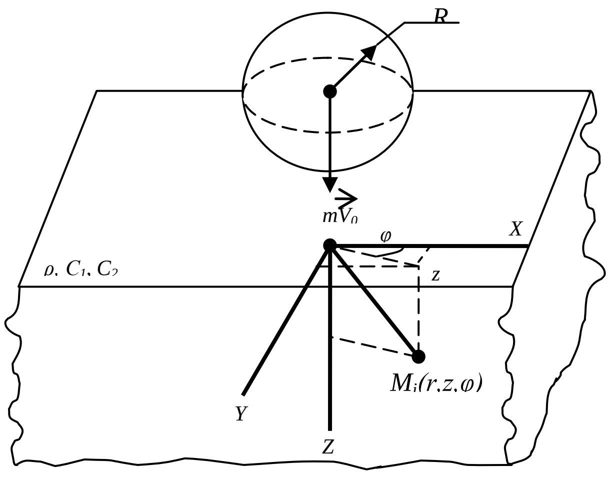

Рис. 1

3. ДИНАМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ УДАРА

Для того, чтобы получить ДУУ, описывающее удар твердого тела по упругому полупространству, обратимся к теоретической механике. В данной задаче удар наносится по нормали к упругому полупространству. В результате удара полупространство приобретает только деформационное движение ввиду того, что его масса бесконечно большая и центр масс остается на месте. Для вывода ДУУ воспользуемся теоремой об изменении количества движения падающего на упругое полупространство абсолютно твердого шара с импульсом mV_0.

$$m\left(V_0 - V(t)\right) = \int_0^z F(t)dt \tag{1}$$

Здесь V- текущая скорость шара, а $F = F_z(t)$ - нормальная контактная сила.

Для того, чтобы (1) стало уравнением удара, необходимо выразить V и F через переменные, определяющие процесс удара. За такие переменные могут быть взяты, следуя Г.Герцу, либо $\alpha = \alpha(t)$ и $p = p(M,t)$, либо $r_k = r_k(t)$ и $p = p(M,t)$. Величина α, называемая сближением, равна максимальному относительному сжатию тел вдоль оси z, т.е. сумме максимальных смещений $u_{zi}(0,0,0,t)$ В нашей задаче $\alpha = u_z(0,0,0,t)$, $p = p(M,t)$ - контактное давление в точке M поверхности контакта полупространства с шаром, возникающее при ударе, $r_k = r_k(t)$ - текущий радиус границы зоны контакта. С учётом *гипотезы плотного касания* зона контакта представляет собой сферическую лунку радиуса r_k. При этом предполагается наличие *плотного касания* во всех точках M поверхности контакта площади S_k. Уравнение связи между функциями $u_z = u_z(r,0,t)$ и $\alpha = \alpha(t)$ могут быть легко найдены из геометрических соображений.

Определим их. В силу аксиальной симметрии возбуждения полупространства шаром при ударе задачу будем решать в цилиндрических координатах *r, φ, z* (рис.3.1) с началом в исходной точке контакта. Зависимость полей напряжений и смещений от φ отсутствует.

На рис. 2 показано внедрение твердого шара радиуса R в упругое полупространство с учётом гипотезы о наличии *плотного касания* во всех точках на поверхности контакта S_k.

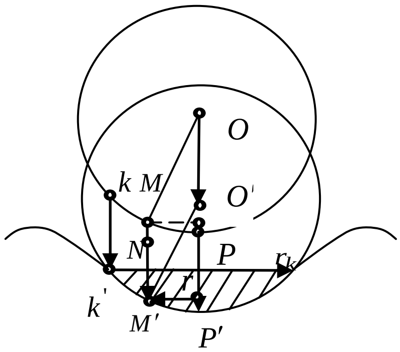

Рис. 2.

$$V(t) = V(0) = V(P) = \dot{\alpha}$$

$$00' = kk' = MM' = \alpha$$

$$u_z = u_z(r,0,t) = NM' = \alpha - MN$$

$$u_z(r,\varphi,t) = \alpha - \left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right); \tag{2}$$

Причём $$\dot{\alpha} = V(t) = \dot{u}_z(r,0,t) \tag{3}$$

По определению можно записать, что

$$F \;=\; \iint\limits_{S_k(t)} P(M,t)dS_{Mz} \tag{4}$$

С учетом осевой симметрии

$$F(t) = 2\pi \int\limits_0^{r_k(t)} P(r,t)rdr \tag{5}$$

Подставив (5) и (3) в (1), получим динамическое уравнение удара твердого шара по упругому полупространству

$$m(V_0 - \dot{\alpha}) = 2\pi \int\limits_0^t dt' \int\limits_0^{r_k(t)} P(r,t)rdr \tag{6}$$

4. О ГЕНЕРАЦИИ УПРУГИХ ВОЛН С НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА ПРИ УДАРЕ

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ВЫБОР МЕТОДА РЕШЕНИЯ

Для вывода КУУ необходимо предварительно решить задачу о генерации упругих волн, возбуждаемых при ударе. Эта задача отличается от осисимметричной задачи Лэмба, хотя и относится к тому же классу задач. Опишем процесс генерации упругих волн с нестационарной поверхности контакта твердого тела и упругого полупространства. Будем исходить, как и в задаче Лэмба, из Представления Ламе и введем динамические потенциалы [2, 4, 8], однозначно определяющие перемещения согласно теореме Клебша - Дюгема о полноте [4]. В силу осисимметричности задачи будем искать скалярные потенциалы $\Phi = \Phi(r,z,t)$ и $\Psi = \Psi(r,z,t)$, удовлетворяющие волновым уравнениям [4]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Phi = 0 \tag{8}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Psi = 0 \tag{9}$$

В этом случае перемещения u_r, u_z и напряжения σ_{rr} σ_{rz} $\sigma_{\varphi\varphi}$ и σ_{zz} определяются так:

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z} \qquad u_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

$$\sigma_{rr} = \rho c_1^2\frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho\left(c_1^2 - 2c_2^2\right)\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \qquad \sigma_{rz} = \rho c_2^2\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{10}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \rho c_1^2\frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho\left(c_1^2 - 2c_2^2\right)\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \qquad \sigma_{rr} = \rho c_1^2\frac{\partial u_z}{\partial z} + \rho\left(c_1^2 - 2c_2^2\right)\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right)$$

Задача имеет следующие начальные условия: $u_z = u_r = 0$; $\dot{u}_r = 0$ при $t = 0$ $\forall r;\ z \neq 0$.
А так как скорость тела V при $t = 0$ равна V_0, то

$$\dot{u}_z(0,0,0) = V_0 \tag{11}$$

Известно, что граничные условия в динамических контактных задачах, связанных с ударом, являются *граничными условиями смешанного типа* [2]. В нашем случае имеют место динамические и кинематические условия на границе.

Динамические граничные условия определяются тем, что на поверхности контакта S_k .

$$\sigma_{zz}(M,t) = -p(M,t), \;\; \sigma_{rz}(M,t) = 0, \quad (\cdot)M \in S_k \,.$$

На свободной поверхности потребуем, чтобы $\sigma_{zz} = 0, \sigma_{rz=0}$. Эти условия можно переписать в более удобной форме. Для этого выразим:

$$p(M,t) = pf(r,t)H(r,t) \quad \forall r,t\,, \tag{12}$$

где $H(r,t) = H\_\left(1 - r / r_k(t)\right) = \begin{cases} 1 & 0 \le r \le r_k(t) \\ 0 & r > r_k(t) \end{cases}$.

Здесь $H\_(x)$ - асимметричная единичная функция (функция Хевисайда) [6].

Тогда

$$\sigma_{zz} = -pf(r,t)H(r,t), \sigma_{rz}(r,0,t) = 0, \quad \forall r,t \tag{13}$$

Естественно, что решение должно удовлетворять условию затухания на бесконечности [4,7].

Кинематические граничные условия определяются равенством на поверхности контакта z компоненты смещения $u_z(r,0,t)$ и глубины внедрения точек шарика $h(r,t)$ а также равенством скоростей точек поверхности контакта упругого полупространства $\dot{u}_z$, и скорости тела $V = V(t)$, которым наносится удар. За пределами зоны контакта $\dot{u}_z$ уже не равна V и, в общем, отлична от нуля. Математически кинематические граничные условия можно выразить формулами

$$u_z(r,0,t)H(r,t) = h(r,t)H(r,t) \qquad \dot{u}_z(r,0,t)H(r,t) = V(t)H(r,t) \tag{14}$$

4.2. Решение задачи в кратных интегралах методом интегральных преобразований

Перейдем к решению задачи. Будем искать потенциалы Φ и Ψ в виде [2,4,7]:

$$\Phi(r,z,t) = \int_{g-i\infty}^{g+i\infty}\int_0^{\infty} \varphi^*(z,k,p)J_0(kr)e^{pt}kdkdp, \Psi(r,z,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{g-i\infty}^{g+i\infty}\int_0^{\infty}\Psi^*(z,k,p)J_0(kr)e^{pt}kdkdp \tag{15}$$

Подставив (15) в (8), найдем с учетом условия затухания решения на бесконечности, что

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \varphi(k,\chi_1,p)e^{-\chi_1 z} = \varphi(k,p)e^{-\chi_1 z} = \varphi e^{-\chi_1 z} \quad ,\chi_1 = \frac{1}{c_1}\sqrt{p^2 + k^2 c_1^2} \\ \varphi^* &= \varphi(k,\chi_2,p)e^{-\chi_2 z} = \varphi(k,p)e^{-\chi_2 z} = \varphi e^{-\chi_2 z} \quad ,\chi_2 = \frac{1}{c_2}\sqrt{p^2 + k^2 c_2^2} \end{aligned} \tag{16}$$

Вывод выражений (16) приведен [2]. Потенциалы имеют вид:

$$\Phi(r,z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{g-i\infty}^{g+i\infty}\int_0^{\infty}\varphi J_0(kr)e^{-\chi_1 z+pt}kdkdp \quad \Psi(r,z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{g-i\infty}^{g+i\infty}\int_0^{\infty}\Psi J_0(kr)e^{-\chi_2 z+pt}kdkdp \tag{17}$$

Подставив (17) в (10) и проделав необходимые преобразования, получим выражения для полей перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} u_r(r,z,t)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{g-i\infty}^{g+i\infty}\int_0^{\infty}\left[\chi_2\Psi e^{-\chi_2 z}-\varphi e^{-\chi_1 z}\right]J_1(kr)e^{pt}k^2dkdp\\ u_z(r,z,t)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{g-i\infty}^{g+i\infty}\int_0^{\infty}\left[k^2\Psi e^{-\chi_2 z}-\chi_1\varphi e^{-\chi_1 z}\right]J_0(kr)e^{pt}kdkdp \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}&=\frac{\rho c_1^2}{2\pi i}\int_{g-i\infty}^{g+i\infty}\int_0^{\infty}\left[\left(k-\frac{2c^2}{r}\right)\left(\chi_2\psi e^{-\chi_2 z}-\varphi e^{-\chi_1 z}\right)\right]kJ_1(kr)+\\ &+(1-2c^2)\left(\chi_1^2\varphi e^{-\chi_1 z}-\chi_2k^2\psi e^{-\chi_2 z}\right)e^{pt}kdkdp\\ \sigma_{rz}&=\frac{\rho c_2^2}{2\pi i}\int_{g-i\infty}^{g+i\infty}\int_0^{\infty}\left[2\chi_1\varphi e^{-\chi_1 z}-(\chi_2+k^2)\psi e^{-\chi_2 z}\right]J_1(kr)k^2e^{pt}kdkdp\\ \sigma_{\varphi\varphi}&=\frac{\rho c_2^2}{2\pi i}\int_{g-i\infty}^{g+i\infty}\int_0^{\infty}\left[\begin{array}{l} k\left(\chi_2\psi e^{-\chi_2 z}-\varphi e^{-\chi_1 z}\right)\left(kJ_0(kr)-2c^2\dfrac{\partial J_1(kr)}{\partial r}\right)+\\ +(1-2c^2)\left(\chi_1^2\varphi e^{-\chi_1 z}-k\chi_2^2e^{-\chi_2 z}\right)J_0(kr)\end{array}\right]e^{pt}kdkdp\\ \sigma_{zz}&=\frac{\rho c_2^2}{2\pi i}\int_{g-i\infty}^{g+i\infty}\int_0^{\infty}\left[(\chi_2^2+k^2)\varphi e^{-\chi_1 z}-2\chi_2k^2\psi e^{-\chi_2 z}\right]J_0(kr)e^{pt}kdkdp \end{aligned} \tag{19}$$

где $c=\dfrac{c_2}{c_1}<1$

Для определения функций φ и ψ через функцию f, удовлетворим динамическим граничным условиям (13),(14) и представим функцию контактного давления в виде

$$p(M,t)=pf(r,t)=\frac{\rho}{2\pi i}\int_{g-i\infty}^{g+i\infty}\int_0^{\infty}f(k,p)J_0(kr)e^{pt}kdkdp\,, \tag{20}$$

где

$$f(k,p)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{p(M,t)}{\rho}J_0(kr)e^{-pt}rdrdt=\int_0^{\infty}\int_0^{r_k(t)}f(r,t)J_0(kr)e^{-pt}rdrdt$$

Таким образом, приравнивая с учетом знака σ_{zz} из (19) при $z=0$ выражению (20), получим

$$(p^2+2c_2^2k^2)\varphi-2c_2k^2\sqrt{p^2+c_2^2k^2\psi}=\int_0^{\infty}\int_0^{r_k(t)}f(r,t)J_0(kr)e^{-pt}rdrdt \tag{21}$$

Так как $\sigma_{zz}(r,0,t)\equiv 0\ \forall r,t$, то из второго выражения в (19) при $z=0$ следует, что

$$2c_2^2\sqrt{p^2+c_2^2k^2\psi}-c_1(p^2+2c_2^2k^2)\psi=0 \tag{22}$$

Разрешая уравнения (21) и (22) относительно φ и ψ, получим:

$$\varphi(k,p) = -\frac{c_1(p^2+2c_2^2k^2)\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{r_k(t)} f(r,t)J_0(kr)e^{-pt}rdrdt}{c_1(p^2+2c_2^2k^2)^2-4c_2^3k^2\sqrt{(p^2+2c_1^2k^2)(p^2+2c_2^2k^2)}} \qquad (23)$$

$$\psi(k,p) = -\frac{2c_2^2\sqrt{p^2+c_1^2k^2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{r_k(t)} f(r,t)J_0(kr)e^{-pt}rdrdt}{c_1(p^2+2c_2^2k^2)^2-4c_2^3k^2\sqrt{(p^2+2c_1^2k^2)(p^2+2c_2^2k^2)}} \qquad (23)$$

Если теперь подставить (23) в (18) и (19), то можно получить выражения для полей смещений и напряжений в кратных интегралах. Они однозначно удовлетворяют дифференциальным уравнениям движения [4,7]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}}{r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2u_r}{\partial t^2}\\ &\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}}{r}=\rho\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}\end{aligned} \qquad (24)$$

и динамическим граничным условиям[1,4]

4.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПЕРЕМЕННЫМ *P* И *K* В ВЫРАЖЕНИЯХ ДЛЯ $u_z = u_z(r,0,t)$ И $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(r,z,t)$).

Для вывода в дальнейшем КУУ получим выражение z - компоненты смещения u_z для точек поверхности $z=0$ и приведем его к удобному виду. Подставим (23) в (18). Проделав элементарные операции, получим выражение для u_z в кратных интегралах

$$\begin{aligned} u_z(r,0,t) = &\int\limits_0^{\infty}dt'\int\limits_0^{r_k(t)}dr'r'f(r',t')\int\limits_0^{\infty}dk\cdot k\cdot J_0(kr)J_0(kr')\times\\ &\times\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{g-i\infty}^{g+i\infty}\frac{p^2\sqrt{p^2+c_1^2k^2}e^{pt}dp}{c_1(p^2+2c_2^2k^2)^2-4c_2^3k^2\sqrt{(p^2+c_1^2k^2)(p^2+c_2^2k^2)}}\end{aligned} \qquad (25)$$

где $\tau = t - t'$.

В [2] изложены результаты вычисления интегралов p и k в (3.25). В разделе (П.3.8) интеграл по переменной " P " приведен к компактному виду. Кратко рассмотрим основные этапы преобразований и вычислений и проанализируем полученные результаты.

Обозначим

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{g-i\infty}^{g+i\infty}\frac{p^2\sqrt{p^2+c_1^2k^2}e^{pt}dp}{c_1(p^2+2c_2^2k^2)^2-4c_2^3k^2\sqrt{(p^2+c_1^2k^2)(p^2+c_2^2k^2)}} \qquad (3.26)$$

Функция-интеграл $I = I(\tau,k,c_1,c_2)$ является лапласовским оригиналом подынтегральной функции (26). Поэтому в [2] она вычисляется методами теории вычетов функций комплексной переменной. Предварительно (26) приводится к удобному для дальнейших вычислений виду:

$$I = \frac{1}{c_1} I_1 + 4c_2 c^2 k^2 I_2 \tag{27}$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{g-i\infty}^{g+i\infty} \frac{(p^2 + 2c_2^2 k^2)^2 \sqrt{p^2 + c_1^2 k^2} e^{pt} dp}{p^6 + 8c_2^2 k^2 p^4 + 8(3 - 2c^2) c_2^4 k^4 p^2 + 16 c_2^6 k^6 (1 - c^2)} \tag{28}$$

и

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{g-i\infty}^{g+i\infty} \frac{(p^2 + 2c_1^2 k^2)^2 \sqrt{p^2 + c_2^2 k^2} e^{pt} dp}{p^6 + 8c_2^2 k^2 p^4 + 8(3 - 2c^2) c_2^4 k^4 p^2 + 16 c_2^6 k^6 (1 - c^2)} \tag{29}$$

Подынтегральные функции интегралов I_2 и I_1 имеются в точках

$$p_j^{\pm} = \pm i n_j c_2 k \text{ , где } j = 1,2,3 \tag{30}$$

простые мнимые полюсы первого порядка, которые определяются из решения уравнения

$$p^6 + 8c_2^2 k^2 p^4 + 8(3 - 2c^2) c_2^4 k^4 p^2 + 16 c_2^6 k^6 (1 - c^2) \tag{31}$$

В [2] показано, что числа n_j таковы, что

$$n_3 > n_2 > n_1 > 0, n_1 < 1, n_{2,3} > 1 \tag{32}$$

во всех практически значимых случаях. Наличие в точках $p_j^{\pm}$ простых мнимых полюсов физически означает, что в результате удара твердым телом по упругому полупространству в последнем возбуждаются не только распространяющиеся вглубь полупространства упругие волны, но и поверхностные релеевские волны, разбегающиеся от зоны контакта вдоль поверхности $z = 0$. Действительно, подставив (30) с учетом (32) в (16), получим, что

$$\begin{gathered} \chi_{11}^{\pm} = k\sqrt{1 - (n_1 c)^2} > 0, \quad \chi_{21}^{\pm} = \sqrt{1 - n_2^2} > 0 \\ \chi^{\pm}{}_{12,3} = ik\varsigma_{2,3}, \quad \chi^{\pm}{}_{22,3} = ik\eta^{\pm}{}_{2,3} \end{gathered} , \tag{33}$$

где

$$\varsigma_{2,3}^{\pm} = \sqrt{(n_{2,3} c)^2 - 1} > 0 \quad \eta_{2,3}^{\pm} = \sqrt{n_{2,3}{}^2 - 1} > 0$$

С учетом (33) выражения для потенциалов φ^* и ψ^* (16) примут вид

$$\begin{gathered} \varphi_{11}^* = \varphi_{11}(k, \chi_{11}, p) \exp\left(-zk\sqrt{1 - (n_1 c)^2}\right) \\ \psi_{11}^* = \psi_{11}(k, \chi^{\pm}{}_{21}, p) \exp\left(-zk\sqrt{1 - n_1{}^2}\right) \\ \varphi_{12,3}^* = \varphi_{12,3}(k, \chi^{\pm}{}_{12,3}, p) \exp\left(izk\sqrt{(n_{2,3} c)^2 - 1}\right) \\ \psi_{22,3}^* = \psi_{22,3}(k, \chi^{\pm}{}_{22,3}, p) \exp\left(izk\sqrt{(n_{2,3} c)^2 - 1}\right) \end{gathered} \tag{34}$$

Их анализ и анализ выражений для полей (17) - (19) показывают, что компоненты полей с действительными числами $\chi_{11}^{\pm}$ и $\chi_{21}^{\pm}$ не распространяются вглубь упругого полупространства. Они имеют затухающие по экспоненте вдоль z парциальные амплитуды и распространяются только по поверхности $z=0$. Компоненты полей с чисто мнимыми числами $\chi^{\pm}_{12,3}$ и $\chi^{\pm}_{22,3}$ распространяются вглубь упругого полупространства по направлению z. Этот вывод подчеркивается и идентичностью по форме уравнения (31) уравнению Релея в задаче о поверхностных волнах [4,7]

Вернемся к интегралам (28), (29). Их вычисление методами теории вычетов в [2] приводит к тому, что функция-интеграл *I* окончательно принимает вид:

$$I=\begin{cases}0, & \tau\le 0\\ k\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{2}A_{ij}I_{ij}(k,n_i,c_j,c_2) & \tau>0\end{cases} \tag{35}$$

где

$$A_{ij}=\begin{cases}A_i=\dfrac{c(c^{-2}-n_i^2)(2-n_i^2)^2}{n_i\left[3n_i^4-16n_i^2+8(3-2c^2\right]} & j=1\\ A_{i+3}=\dfrac{4c^2(c^{-2}-n_i^2)(1-n_i^2)^2}{n_i\left[3n_i^4-16n_i^2+8(3-2c^2\right]} & j=2\end{cases} \tag{36}$$

и

$$I_{ij}=\int\limits_0^{\tau}J_0(kc_j\theta)\sin\left[n_ikc_2(\tau-\theta)\right]d\theta \tag{37}$$

Рассмотрим теперь интегралы (37). Сделав замену переменных

$$x_j=kc_j\theta,\ \ a_j=kc_j\tau\ \ b_{ij}=n_i\frac{c_2}{c_j} \tag{38}$$

приведем их к виду

$$I_{ij}=\frac{1}{kc_j}\int\limits_0^{a_j}J_0(x_j)\sin\left[b_{ij}(a_j-x_j)\right]dx_j \tag{39}$$

Прежде, чем приступить к их вычислению, исследуем, какие значения могут принимать величины a_j и b_j. Как видно из (3.38), величины a_j могут принимать любые положительные значения; $a_j\ge 0$. Что же касается коэффициентов b_{ij}, то результаты их расчета приведены для инструментальной стали, дюралюминия и меди в [2]. При этом $b_{1j}<1, b_{2j}>1, b_{3j}>1$. Таким образом, для определения (39) необходимо уметь вычислить функции - интегралы вида

$$I_n=\int\limits_0^{a}J_0(x)\sin\left[b(a-x)\right]dx \tag{40}$$

где а) $0<b<1$; б) $b>1$.

Видно, что интеграл I_n является сверткой функции $\varphi_1=J_0(x)$ и $\varphi_2=\sin(bx)$. Этот интеграл и подобные ему интегралы вычислены в [2].

Анализ результатов, проведенный в [2] показывает, что наиболее компактными формами записи функции-интеграла (40) являются форма:

$$I_n = \frac{2}{\sqrt{1-b^2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_{2n}(b) J_{2n}(a),\ b<1 \tag{41}$$

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{b^2-1}} \left[J_0(a) - \cos(ba) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Ч_{2n}(b) J_{2n}(a) \right],\ b>1 \tag{42}$$

Здесь

$$Ч_{2n}(b) = T_{2n}(b) + iU_{2n}(b) \tag{43}$$

где, согласно [2,6], $T_{2n}(b)$ - полином Чебышева 1-го рода ; $U_{2n}(b)$ - функция Чебышева 2-го рода.

При $b>1$ функции $U_{2n}(b)$ принимают чисто мнимое значение, поэтому функции $Ч_{2n}$ являются действительными. Теперь с учетом предыдущего интеграл (35) принимает вид:

$$I = \begin{cases} 0,\ \tau \le 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{2} \left\{ N_{1j} \dfrac{2}{(1-b_{ij}^2)^{1/2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_{2n}(b_{1j}) J_{2n}(a_j) + \sum\limits_{i=2}^{3} N_{ij} \dfrac{1}{\left(b_{ij}^2 - 1\right)^{1/2}} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[J_0(a_j) - \cos(b_{ij} a_j) + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n Ч_{2n}(b_{ij}) I_{2n}(a_j) \right] \right\} \end{cases} \tag{44}$$

Здесь

$$N_{ij} = A_{ij} / c_j \tag{44}$$

Используя эту формулу записи, перепишем (25) так:

$$u_z(r,0,t) = \int_0^t dt' \int_0^{r_k(t')} f(r',t') G(r,r',t,t') r' dr', \tag{45}$$

где

$$G = \sum_{j=1}^{2} \left\{ \frac{2N_{1j}}{(1-b_{1j}^2)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_{2n}(b_{1j}) \int_0^{\infty} J_0(kr') J_{2n}(kc_j \tau) kdk + \right.$$

$$+ \sum_{i=2}^{3} \frac{N_{ij}}{(b_{1j}^2 - 1)^{1/2}} \left[\int_0^{\infty} J_0(kr) J_0(kr') \cos(kn_i c_2 \tau) kdk + \right.$$

$$\left. \left. + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Ч_{2n}(b_{ij}) \int_0^{\infty} J_0(kr) J_0(kr') J_{2n}(kc_j \tau) kdk \right] \right\} \tag{46}$$

Обратим внимание на то, что функция G является *“zz”* компонентой $(2\pi\rho U_z^{(z)})$ фундаментального решения (тензора Грина) уравнений движений в перемещениях [4] при $p_i^{(k)} = 0$ на S_k. Действительно, в соответствии с обобщением формулы Сомильяны на динамические задачи [4,7]

$$u_k(r,0,t) = \int_0^t dt' \int_0^{r_k(t')} 2\pi p_i(r',t') U_i^{(k)}(r,r',t-t') rdr$$

при отсутствии массовых сил. При наличии осевой симметрии задачи и требовании, чтобы $p_i^{(k)} \equiv 0$ на S_k, получим

$$u_k(r,0,t) = \int_0^t dt' \int_0^{r_k(t')} 2\pi p_i(r',t') U_i^{(k)}(r,r',t-t') r dr \tag{47}$$

С учетом того, что на S_k только $p_z \neq 0$ получим для u_z, что:

$$u_z(r,0,t) = \int_0^t dt' \int_0^{r_k(t')} 2\pi\rho f(r',t') U_z^{(z)}(r,r',t-t') r dr \tag{48}$$

то есть

$$G(r,r',t-t') = 2\pi\rho U_z^{(z)}(r,r',t-t') \tag{49}$$

В соответствии с этим, *функция* G *является обобщенной*, как и $u_z^{(z)}$. В данной задаче, она может быть представлена как сумма регулярного и сингулярного слагаемых со “*сложным рельефом*” [4,6].

$$G = G_R + G_S \tag{50}$$

Присутствие в (50) G_R является очевидным как в силу наличия граничной поверхности у полупространства, так и в присутствии регулярных слагаемых в фундаментальном решении для неограниченного пространства [4,7]. Всё это было использовано при построении фундаментального решения для полупространства [2].

Подведем итоги. Можно утверждать, что выражение (45) является основой для вывода КУУ. Однако вычисление функции G по формулам (27)… делает дальнейшее решение задачи чрезвычайно громоздким. Громоздкость аналитических вычислений, приведённых выше, практически не позволяет получить также и компактные конечные выражения для полей смещений и напряжений, возникающих при ударе. Так в [2] были проделаны вычисления по определению компоненты σ_{zz}:

$$\sigma_{zz} = \rho \int_0^t dt' \int_0^{r_k(t')} f(r',t') G_\sigma(z,r,r',t-t') r' dr', \tag{51}$$

где

$$\begin{aligned} G_\sigma = {} & c_1 \int_0^\infty dk k^2 J_0(kr) J_0(kr') \sum_{j=1}^{3} \Big\{ A_{1j} \Big[\exp(-k\sqrt{1-n_j^2 c^2}\, z) - \\ & - \exp(-k\sqrt{1-n_j^2}\, z) \Big] \int_0^\tau d\theta \sin(k n_j c_2(\tau-\theta)) \int_0^\theta J_0(k c_j(\theta-\eta)) \cdot \\ & \cdot J_0(k c_2 \eta) d\eta + c \Big[\Big[A_{2j} \exp(-k\sqrt{1-n_j^2 c^2}\, z) - \\ & - A_{3j} \exp(-k\sqrt{1-n_j^2}\, z) \Big] \sin(k n_j c_2 \tau \Big] \Big\} \end{aligned} \tag{52}$$

Все вышеизложенное еще раз подчеркнуло широко распространенную точку зрения о том, что задачи удара относятся “*к числу труднейших задач математической физики*”[3,4,7].

4. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ УДАРА

При выводе КУУ учтём, что при $\tau = 0$ функция $G = 0$ при любых $r, r' < r_k(t)$, согласно (26). Тогда КУУ может быть получено на основе решения контактной задачи (26) с учетом (27) и (36). Эти решения должны удовлетворять кинематическим граничным условиям в форме (2) или (13). Они устанавливают связь между функциями $\alpha = \alpha(t), r_k = r_k(t), f = f(t)$ и, по сути дела, тождественны граничным условиям, которые выражаются через вышеуказанные функции.

Получим КУУ. В самой общей форме записи они тождественны выражениям (14). Такая форма записи, утверждая выполнение граничных условий в каждой точке поверхности контакта S_k, не является удобной для дальнейшего решения задачи. Эквивалентной ей формой записи КУУ является форма, которую можно получить путем совершения преобразований Лапласа и Фурье-Бесселя над выражениями (14). Здесь также осуществляется сшивание решений для шара и полупространства во всех точках S_k:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u_z(r,0,t)H(r,t)J_0(qz)e^{-st}rdrdt = \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\alpha(t) - \left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right)\right]H(r,t)J_0(qz)e^{-st}rdrdt\end{aligned} \tag{53}$$

Однако (53) так же не может быть взято за основу дальнейшего из-за сложности вычисления интегралов. К успеху приводит рассуждение, аналогичное рассуждению Г. Герца, проведенного им при выводе КУУ квазистатической задачи. Представим $u_z = u_z(r,0,t)$ в виде

$$u_z(r,0,t) = u_z(0,0,t) + u_z(r,0,t) - u_z(0,0,t) \tag{54}$$

На поверхности контакта S_k при $r \le r_k(t)$ справедливо условие (2). С другой стороны, смещение u_z определяется во всех точках поверхности $z = 0$ и в том числе, в точках контакта S_k выражением (3.50). Приравнивая (2) и (45), с учетом (54), получим

$$\alpha(t) = \int_0^t dt' \int_0^{r_k(t)} f(r',t')G(0,r,t-t')r'dr' \tag{55}$$

$$R - \sqrt{R^2 - r^2} = \int_0^t dt' \int_0^{r_k(t)} f(r',t')\left[G(0,r,t-t') - G(r,r',t-t')\right]r'dr' \tag{56}$$

Это и есть КУУ. Приведем их к более удобному для дальнейшего виду. Так как в действительности $r \le r_k(t) << R$ на S_k, то

$$R - R\sqrt{1-(r/R)^2} \approx r^2/2R \tag{57}$$

С учетом (54,55,57)) перепишем (56) так

$$\frac{r^2}{2R} = \alpha(t) - \int_0^t dt' \int_0^{r_k(t)} f(r',t')G(r,r',t-t')r'dr' \tag{58}$$

Выражение (58) *справедливо для всех точек* S_k *, в том числе и для* $r = r_k(t)$.

Это позволяет сразу же написать уравнения для определения $r = r_k(t)$. Оно имеет вид:

$$\frac{r_k^2(t)}{2R} = \alpha(t) - \int_0^t dt' \int_0^{r_k(t)} f(r',t')G(r_k(t),r',t-t')r'dr' \tag{59}$$

Уравнения (55) и (58) перепишем в интегро-дифференциальной форме, что удобно для дальнейшего. При вычислении производных по параметру t от выражений (55) и (59) воспользуемся правилом Лейбница дифференцирования по параметру [6]. После ряда элементарных преобразований получим

$$\dot{\alpha} = \int_0^t dt' \int_0^{r_k(t)} f(r,t') \frac{\partial G(0,r,t-t')}{dt} rdr \tag{60}$$

$$\dot{r}_k(t) = \frac{\int_0^t dt' \int_0^{r_k(t)} f(r,t') \frac{\partial}{\partial t}\left[G(0,r,t-t') - G(r_k(t),r,t-t')\right] rdr}{\frac{r_k(t)}{R} + \int_0^t dt' \int_0^{r_k(t)} f(r,t') \frac{\partial G(r_k(t),r,t-t')}{\partial r_k} rdr} \tag{61}$$

КУУ в форме (60) и (61) являются наиболее удобными для дальнейшего решения задачи об ударе твердым шаром по упругому полупространству. На уравнение (61) можно посмотреть как на уравнение *интегро-дифференциальной связи, определяющей с точки зрения механики управляемого движения полную программу движения – закон движения по* $r_k = r_k(t)$.

5. ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ УДАРА

Запишем систему уравнений, описывающих процесс соударения твердого шара и упругого полупространства. Она состоит из ДУУ (6) при подстановке в него (60) и КУУ (61) и имеет вид:

$$\int_0^t dt' \int_0^{r_k(t')} \left[2\pi\rho + m\frac{\partial G(0,r,t-t')}{\partial t} \right] f(r,t')rdr = mv_0$$

$$\dot{r}_k(t) = \frac{\int_0^t dt' \int_0^{r_k(t)} f(r,t') \frac{\partial}{\partial t}\left[G(0,r,t-t') - G(r_k(t),r,t-t')\right] rdr}{\frac{r_k(t)}{R} + \int_0^t dt' \int_0^{r_k(t)} f(r,t') \frac{\partial G(r_k(t),r,t-t')}{\partial r_k} rdr} \tag{62}$$

Эта система уравнений является замкнутой относительно функций $r_k = r_k(t)$ и $f = f(r,t)$. Однако, ее анализ показывает, что она неоднозначно определяет эти функции, так на $f = f(r,t)$ входит в уравнения только интегрально. Действительно, например, любые

функции вида
$$f = A(t)\Phi\left(\frac{r}{r_k(t)}\right), \quad \Phi(1) = 0 \tag{63}$$

будут удовлетворять уравнениям удара. Для выявления адекватных реальности решений необходимо рассмотреть данную задачу, как вариационную.

6. ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ КАК ОСОБАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ПРОБЛЕМА НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ.

Известно [1, 2, 8], что уравнения статической и динамической контактных проблем *не определяют единственным образом её решение.* Для того чтобы сделать решение задачи об ударе упругих тел однозначным Н. А. Кильчевский обратился к *Принципу минимальных реакций* [1] - следствию дифференциального вариационного *Принципа наименьшего принуждения Гаусса* [1]. На его основе он установил, что действительное состояние движения тел при их контактном сжатии является таковым, что для него функция – интеграл

(функционал)
$$Z = \iint\limits_{s_k} p^2(M,t)ds_k \tag{64}$$

принимает минимальное значение по отношению к функциям сравнения Z_i в любой момент времени [1]. По Кильчевскому решение контактной проблемы сводится к исследованию условий минимума (64) при условиях(62), то есть, *к проблеме условного экстремума* [1]. Этот путь позволяет сделать однозначным решение и нашей задачи. Опуская постоянный множитель (64) примет вид:

$$Z = \int\limits_0^{r_k(t)} f^2(r,t)rdr \tag{65}$$

Таким образом, *в любой момент времени значения функции (65) минимальны на действительном движении системы* по отношению к функциям сравнения Z_i при выполнении условий (62), которые являются уравнениями удара.

В работе [2] было показано, что вариация функционала (65) определяется только изохронной вариацией δf формы функции f . В задаче не варьируется форма границы зоны контакта, так, как *в любой момент времени это окружность.* Этот факт и то, что *Принцип минимальных реакций* является алгебраическим, указывают на то, что никаких дополнительных дифференциальных уравнений к системе уравнений (62) он не дает. Он является *алгебраическим вариационным условием*, выделяющим из некоторого множества функций сравнения $f_i = f_i(r,t)$ и $r_{k_i} = r_{k_i}(t)$, удовлетворяющих уравнениям (62), только такую действительную пару этих функций, которая обеспечивает минимальные значения f в любой момент времени. Это подсказывает естественный и, *возможно, единственный способ решения задачи удара* путем прямого решения системы (62) для ряда функций сравнения $f_i = f_i(r,t)$, задаваемых, следуя Г. Герцу, из физических соображений, с последующим выбором адекватной реальности пары функций $f = f(r,t)$ и $r_k = r_k(t)$ на основе (65). Исходя из *Принципа соответствия*, предположим, что действительное распределение движения на поверхности контакта имеет *герцевский* вид:

$$f_0 = A(t)\sqrt{1-(r/r_k(t))^2} \tag{66}$$

В качестве функций сравнения возьмем функции, описывающие распределение давления, подобное к распределению Герца. Например,

$$f_1 = A_1(t)\sqrt[4]{1-(r/r_k(t))^2} \quad f_2 = A_2(t)(1-(r/r_k(t))^2) \quad f_3 = A_3(t)(1-r/r_k) \tag{67}$$

Амплитуды A_i в зависимостях (66) и (67) удобно выразить, следуя Г. Герцу, через значения контактной силы. Действительно, согласно (5) и (11).

$$F = 2\pi\rho \int\limits_0^{r_k(t)} f(r,t)rdr \tag{68}$$

Тогда $$f_0 = \frac{3}{2\rho} \cdot \frac{F(t)}{\pi r_k^2(t)} \sqrt{1-(r/r_k(t))^2} \qquad f_1 = \frac{5}{4\rho} \cdot \frac{F(t)}{\pi r_k^2(t)} \sqrt[4]{1-(r/r_k(t))^2} \tag{69}$$

$$f_2 = \frac{2}{\rho} \cdot \frac{F(t)}{\pi r_k^2(t)} (1-(r/r_k(t))^2) \qquad f_3 = \frac{3}{\rho} \cdot \frac{F(t)}{\pi r_k^2(t)} (1-r/r_k(t)). \tag{70}$$

Если теперь подставить выражения (69) и (70) в систему уравнений (62) и (65), то получим ряд уравнений и условий, описывающих удар твердым телом по упругому полупространству. Например, для *герцевского распределения* они будут иметь вид:

$$\int_0^t \left\{ F(t') \left[1 - \frac{3m}{2\rho} \cdot \frac{1}{\pi r_k^2(t)} \int_0^{r_k(t')} \frac{\partial G(0,r,t-t')}{\partial t} \sqrt{1-\left(\frac{r}{r_k(t')}\right)^2}\, rdr \right] \right\} dt' = mv_0 \tag{71}$$

$$\dot{r}_k(t) = \frac{\int_0^t dt' F(t') \frac{1}{r_k^2(t')} \int_0^{r_k(t')} \frac{\partial}{\partial t} \left[G(0,r,t-t') - G(r_k(t),r,t-t') \right] \sqrt{1-\left(\frac{r}{r_k(t)}\right)^2}\, rdr}{\frac{2\pi\rho r_k(t)}{3R} + \int_0^t dt' \frac{F(t')}{r_k^2(t')} \int_0^{r_k(t')} \frac{\partial}{\partial r_k} \left[G(r_k(t),r,t-t') \right] \sqrt{1-\left(\frac{r}{r_k(t')}\right)^2}\, rdr} \tag{72}$$

$$Z = \left(\frac{F(t)}{r_k(t)} \right)^2 \tag{73}$$

Следует заметить, что функция $Z(t)$ определена здесь по отношению к (65) с точностью до константы, а уравнение (71) может быть приведено к интегродифференциальному уравнению вида

$$A(r_k(t);\rho,m)\dot{F} + B(\dot{r}_k(t),r_k(t);\rho,m)F + \int_0^t c(r_k(t');\rho,m)F(t')dt' = 0\,. \tag{74}$$

Здесь функции A, B, C имеют громоздкий вид и, поэтому, в явной форме в данной статье не приводятся. Разрешив системы уравнений типа (71), (72), (74) относительно функций $F = F(t)$ и $r_k = r_k(t)$ и, сравнивая полученные решения по условиям типа (73), можно выделить истинное решение, соответствующее ударному процессу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что зная действительные значения $F = F(t)$ и $r_k = r_k(t)$ можно определить зависимости $F = F(\alpha)$ по формуле

$$\alpha = v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} F(t'')dt'' \tag{75}$$

Можно так же определить по известным методикам технические характеристики ударного процесса: коэффициент восстановления скорости, коэффициент формы и т.д. Наконец, знание адекватных реальности зависимостей $F = F(t)$ и $r_k = r_k(t)$ позволяет произвести расчет динамических полей смещений и напряжений, например, по методу Сомильяны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Кильчевский Н.А.** Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар : монография / Н.А. Кильчевский. - Киев : Наукова думка, 1991. – 319 с.

[2] **Родионов А.И.** Исследование соударений деформируемых тел при малых и средних скоростях : дис. ...канд. физ.-мат. наук :01.02.04 / А.И. Родионов ; Ин-т гидродинамики СО АН СССР ; науч. рук. П. М. Алабужев, Г. С. Мигиренко. – Новосибирск, 1986. - 363 с.

[3] **Гольдсмит В.** Удар и контактные явления при средних скоростях / в кн.: Физика быстропротекающих процессов. Т. 2. / Пер. с англ. под ред. И.А.Златина. - М. : Мир,1971. - с.153-203.

[4] **Новацкий В.** Теория упругости : монография / В. Новацкий. / Пер. с польского. - М. : Мир,1975. – 872с.

[5] Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. А.А. Галина – М.: Наука, 1976. – 493 с.

[6] **Маричев О.А**. Метод вычисления интегралов от специальных функций. Теория и таблицы формул. / О.А. Маричев. - Минск. : Наука и техника,1978. – 312 с.

[7] **Рахматулин Х.А.** Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках: монография / Х.А.Рахматулин, Ю.А. Демьянов. - М. : Физматгиз, 1961. – 400с.

[8] **Родионов А.И.** Удар деформируемых тел как неклассическая динамическая вариационная контактная задача / А.И. Родионов. Ю.А. Иванов, Г.А. Сырецкий // Труды Всеросс. науч.-тех. конф. “Наука. Промышленность. Оборона“ (20-22 апреля 2011г.) – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. - С.177-183.

Родионов Андрей Иванович, доцент, кандидат физико-математических наук. Доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов Новосибирского государственного технического университета, профессор кафедры основ приборостроения Сибирской государственной геодезической академии, член - корреспондент МСА, член ПАНИ, профессор АВН. Основные направления научных исследований – теоретическая и прикладная механика, механика деформируемого твёрдого тела, общая физика. Имеет более 150 публикаций, один патент, четыре учебных пособия. Тел. (383) 3-461-777. E-mail: teormech@ngs.ru.

Матвеев Константин Александрович, доктор технических наук, профессор, декан факультета летательных аппаратов Новосибирского государственного технического университета. Основные направления научных исследований – устойчивость, остаточная прочность и разрушение элементов авиационных конструкций. Имеет более 60 публикаций, в том числе 3 монографии. E-mail: fla@graft.nstu.ru.

A.I. Rodionov, K.A. Matveev

On dynamics of impact of absolutely firm sphere on elastic semi space

Impact of deformable bodies as process is considered. Difficulties of creation of the dynamic theory of impact are designated. The closed system of the equations with the variation condition, describing process of blow of absolutely firm sphere on elastic semi space is received. The decision was under construction in isothermal approach within the limits of a dynamic contact problem of the classical theory of elasticity and the theoretical mechanics with a variation condition. It differed from H.Hertz and N.A.Kilchevsky's decisions. Thus influence on impact electric, thermal and acoustic processes wasn't considered.

Key words: impact as process, absolutely firm sphere, elastic semi space, a non classical variation contact problem of the theory of elasticity and dynamics of a firm body, wave fields of pressure and deformations, contact pressure and force, representation of Lame, dynamic potentials, boundary conditions of the mixed type, Green's tensor of elastic semi space, the dynamic equation of impact, the kinematic equation of impact as the equation of integral-differential constraints, Kilchevsky’s functional, comparison functions.