Родионов А.И.. Уравнения аналитической динамики систем с дифференциальными связями произвольных порядков, Ч.1 / А.И. Родионов, // Научный вестник НГТУ – Новосибирск: Изд.-во НГТУ, 2012. № 4(49), С.133 – 140.

Научный вестник НГТУ.-2012. - №4(49).

УДК 531.01.

Уравнения аналитической динамики систем с дифференциальными связями произвольных порядков*

А.И. РОДИОНОВ

В работе представлен вариант Расширения Классической механики, описывающей динамику неголономных и управляемых систем с дифференциальными связями произвольных порядков. Движение таких систем рассматривается как движение несвободной Изображающей Точки (*ИТ*). Эта точка движется в пространстве E_{3N} по ограниченному дифференциальными связями многообразию R_n. Выводится векторное уравнение её движения, подобное уравнениям Лагранжа 1-го рода. Единым образом строится серия аналитических ковариантных форм уравнений движения: "в обобщенных силах", подобные уравнениям Аппеля, уравнениям Лагранжа 2-го рода и ряд других, менее известных. Как обобщение всех форм уравнений представлены уравнения движения *в обобщённых силовых факторах*. Введён ряд новых кинетических мер движения системы как целого: *кинэта* r-го порядка как обобщение кинетической энергии и энергии ускорений. Введены новые меры механического воздействия на систему: *силовые факторы* задаваемых сил, сил инерции и сил реакций связей, их *обобщённые силовые факторы*. Эти уравнения являются основой динамики неголономных систем и систем программного движения без учёта ошибок управления – разомкнутых моделей управления. Приводится пример.

Ключевые слова: системы с дифференциальными связями произвольных порядков, изображающая точка, кинэта, силовой фактор реакций управляющих связей, уравнения движения изображающей точки и их аналитические ковариантные формы, полные и неполные дифференциальные программы движения, разомкнутые модели управления.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие в последние десятилетия мехатроники, авионики и точной электромеханики поставило вопрос об адекватных механических моделях динамики систем управляемого движения с полными и неполными дифференциальными программами движения произвольных порядков. Известно, что большой класс движений систем управляемых по программе может быть описан как класс систем с голономными и неголономными связями общего вида [1]. В рамках одного формализма эти связи могут быть определены как дифференциальные произвольных порядков [2,4,6].

В конце предыдущего столетия в России неголономной механикой высших порядков занимались независимо друг от друга научные коллективы профессоров В.В. Добронравова в Москве, Н.Н. Полякова в Санкт-Петербурге и Г.С. Мигиренко в Новосибирске. Результаты этих независимых друг от друга попыток построения такого Расширения Механики изложены, в [3,4]. Результаты нашего варианта построения такого Расширения Механики представлены, например, в работах [5-8].

*Статья получена 30 сентября 2011г.

Известно, что большой класс движений управляемых по программе систем может быть описан как класс движений с голономными и неголономными связями общего вида [2-4]. В рамках одного формализма эти связи могут быть определены как *дифференциальные произвольных порядков* [7]. В механике управляемого движения удерживающие связи, при помощи которых задана программа движений, называют *управляющими связями*, а уравнения связей – *представлениями программ движений* или кратко - *программой движения* [2]. Всякие другие связи называются *неуправляющими*. “Совокупность управляемого объекта и управляющих связей представляет собой *механическую модель системы управления* в целом; поведение этой модели полностью определяется законами механики”[2]. Принято называть программу движения *полной*, если она однозначно определяет закон движения управляемого объекта. В противном случае ее называют *неполной*. Известно, что в Классической Механике вопрос о движении систем с полной программой движения принципиально решен [2]. При неполных дифференциальных программах движения задача может быть решена в рамках Расширения Классической Механики на движение таких систем.

Цели изложения единого взгляда на основания теории систем с дифференциальными связями произвольных порядков и в первую очередь неголономных систем высших порядков, движение которых регламентируется уравнениями связей, начиная с нелинейных по ускорениям [5], и посвящена эта работа. В ней предпринята попытка обобщения формализма, идей и методов Классической Механики на динамику таких систем в рамках господствующей Парадигмы Механики без исследования ограничений со стороны Квантовой Механики и т.д. Сегодня создание непротиворечивого Расширения представляет не только теоретический, но и практический интерес.

На данный момент поставлены, решены или рассматриваются, например, задачи о:
а) орбитальном манёвре космического летательного аппарата (КЛА) с постоянным по модулю ускорением центра масс и с постоянным по модулю угловым ускорением;
б) “мягкой” стыковке КЛА;
в) динамике управляемых по резкости (рывку) вибрационных и ударных стендов для испытаний изделий микроэлектронной техники;
г) мягком движении (без рывков) роботов-манипуляторов, лифтов и т.д.;
д) расчёте автоматических управляемых бесступенчатых приводов. И ряд других.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ КАК ДВИЖЕНИЯ ЕЁ НЕСВОБОДНОЙ ИЗОБРАЖАЮЩЕЙ ТОЧКИ.

Расширение Классической Механики на системы с дифференциальными связями может быть построено на основе подхода, связанного с описанием программного движения системы как движения ее несвободной Изображающей Точки (*ИТ*). Эта точка движется в пространстве E_{3N} по ограниченному дифференциальными связями многообразию R_n. Конфигурация и свойства последнего определяются как *n* обобщенными координатами: $q^j, j=1,2,...,n$, - совокупность которых определяется наличием неуправляющих связей в числе, равном числу *степеней подвижности* системы [9], так и дифференциальными программами движения - неголономными удерживающими связями ($p<n$). *Заметим, что число степеней свободы* рассматриваемой системы в этом случае будет равно $s=n-p$.

Рассмотрим несвободную систему, состоящую из *N* материальных точек { m_ℓ }. Запишем ее уравнения движения без уравнений связей.

$$\left\{ m_\ell \bar{a}_\ell = \vec{f}_\ell + \bar{g}_\ell,\ \bar{a}_\ell = \ddot{\vec{r}}_\ell,\ \ell = 1,2,...,N. \right. \qquad (1)$$

Здесь: $\vec{f}_\ell$ - результирующая сила задаваемых сил, приложенных к материальной точке m_ℓ, $\bar{g}_\ell$ - неизвестная реакция со стороны всех связей: как голономных, так и связей – программ движения.

Представим $\vec{r}_\ell(x_\ell, y_\ell, z_\ell)$ как $\vec{r}_\ell(\chi_{3\ell-2}, \chi_{3\ell-1}, \chi_{3\ell})$ а $\vec{f}_\ell(X_\ell, Y_\ell, Z_\ell)$ как $\vec{f}_\ell(f_{3\ell-2}, f_{3\ell-1}, f_{3\ell})$,

$$m_\ell = m_{3\ell-2} = m_{3\ell-1} = m_{3\ell};\ M = \sum_{l=1}^{N} m_\ell\ . \tag{2}$$

Введем, согласно [5,10,11], *ИТ***,** имеющую массу *M*, радиус-вектор $\vec{X}(x_i)$, где

$$x_i = \chi_i \sqrt{\mu_i}\ ,\ \mu_i = \frac{m_i}{M}, i = 1,2,\ldots 3N\ . \tag{3}$$

Определим *3N*-мерные векторы *Силового Фактора Задаваемых Сил* $\vec{F}(F_i)$ и *Силового Фактора Реакций Связей* $\vec{R}(R_i)$ как:

$$F_i = f_i \big/ \sqrt{\mu_i}\,; R_i = g_i \big/ \sqrt{\mu_i}\ . \tag{4}$$

Как известно [1-6], при исследовании несвободного движения возможны две постановки задачи. *В соответствии с первой*, материальная система, на которую действуют активные задаваемые силы, движется таким образом, что удовлетворяются уравнения связей. При такой постановке проблемы основной целью является получение системы уравнений движения, *не содержащей неизвестных реакций связей* [1-3]. *В соответствии со второй*, определяются как движение системы, так и дополнительные силы - реакции связей, которые совместно с задаваемыми силами обеспечивают это движение в соответствии с условиями связи. В этом случае *задача является смешанной задачей динамики* [4-8]. Она может быть решена по классической методике [11] в голономных координатах на основе подхода, связанного с методом множителей Лагранжа - множителей связи [2,11]. При решении большинства прикладных задач именно этот способ решения проблемы представляет практический интерес, так как здесь уравнения движения непосредственно составляются и далее анализируются на понятном и привычном для инженера языке - языке сил, моментов и их аналогов. В связи с этим, остановимся в данной работе только на нем.

3. ТЕОРЕМА О ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЕ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ *ИТ*

Пусть движение системы по R_n характеризуется неполной дифференциальной программой движения, задаваемой системой уравнений

$$\begin{cases} f^{\,p}(t, q^j, \dot{q}^j, \ldots, \overset{(k)}{q^j}) = \varphi^p(t, x_i, \dot{x}_i, \ldots, \overset{(k)}{x_i}) = 0; \\ j = 1,\ 2\ ,\ldots,\ n;\ldots i = 1,2,\ldots 3N;\quad p < n \end{cases} \tag{5}$$

где $f^{\,p}(t, q^j, \dot{q}^j, \ldots, \overset{(k)}{q^j})$ и $\varphi^p(t, x_i, \dot{x}_i, \ldots, \overset{(k)}{x_i})$ — уравнения программ движения, записанные в обобщенных и декартовых координатах *ИТ*.

Разложим с*иловой фактор реакций* всех наложенных на *ИТ* связей $\vec{R} = \sum_{i=1}^{3N} R_i \cdot \vec{i}_i$ на три компоненты: $\vec{R}_{и.с.}$ - силовой фактор реакций идеальных связей, $\vec{R}_{н.и.с.}$ - силовой фактор реакций неидеальных связей и $\vec{R}_{у.с.}$ - силовой фактор *реакций управляющих связей*.

Тогда $\vec{R}_{у.с.}$ примет вид

$$\overset{(r)}{\vec{R}}_{у.с.} = \sum_{p\le n-1} \left(\lambda_p \frac{\partial \varphi^p}{\partial \overset{(k)}{x}} + \vec{T}_k^p(t, x_i, \ldots \overset{(k)}{x_i})\right) \tag{6}$$

Доказательство:

В соответствии с научной традицией включим $\vec{R}_{н.и.с.}$ в силовой фактор задаваемых сил. В результате получим форму записи системы уравнений (1) в виде

$$M\,\ddot{\vec{x}} = \vec{F} + \vec{R}_{и.с.} + \vec{R}_{у.с.} \tag{7}$$

Это дает возможность воспользоваться при анализе программного движения системы формализмом, развитым применительно к несвободному движению одной материальной точки [10]. Уравнение (6) и есть *уравнение движения ИТ*. Приведем уравнения (5) и (7) к одному дифференциальному порядку. Определим $\overset{(r)}{\vec{R}}_{у.с.}$. Разложим каждую составляющую $\overset{(r)}{\vec{R}}_{у.с.}$ *по собственным ортогональным базисам* “***k-градиент - k-трансверсаль***”. Это удобно с учетом принятого в теории управления *выделения градиентного управления*.

Тогда $\overset{(r)}{\vec{R}}_{у.с.}$ примет вид (6). *Что и требовалось доказать.*

Здесь r=0 при $k \le 1$, а при $k \ge 2$ - r=k-q. Параметры q=1 и q=2 задаются соответственно при нелинейных и линейных по $\overset{(k)}{x_i}$ связях. Неопределенные множители Лагранжа λ_p могут быть представлены в разных видах, удобных при численном решении конкретных прикладных задач: $\lambda_p = \lambda_p(t) = \overset{(r+2)}{\mu_p} = \overset{(r)}{\eta_p}$. Трансверсальная компонента $\vec{T}_k^p \perp \frac{\partial \varphi^p}{\partial \overset{(k)}{x}}$ определяет часть управления, отличную от k - градиентной.

С учётом этого замкнутая система уравнений программного движения *ИТ* примет вид:

$$\begin{cases} M \overset{(r+2)}{\vec{x}} = \overset{(r)}{\vec{F}} + \overset{(r)}{\vec{R}}_{и.с.} + \sum\limits_{p\le n-1} \left(\lambda_p \dfrac{\partial \varphi^p}{\partial \overset{(k)}{x}} + \vec{T}_k^p\right) \\ \dfrac{d\varphi^p}{dt} = \overset{(k+1)}{\vec{x}} \dfrac{\partial \varphi^p}{\partial \overset{(k)}{x}} + \Psi^p(t, x_i, \ldots \overset{(k)}{x_i}) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Функции λ_p - множители связи Лагранжа, - находятся в результате решения системы (8). Для $\varphi^p = A_i^p(t, x_i, \ldots \overset{(k-1)}{x_i}) \overset{(k)}{x_i} + b^p(t, x_i, \ldots \overset{(k-1)}{x_i})$ - линейных по $\overset{(k)}{x_i}$ связей, функции-коэффициенты Ψ^p имеют вид $\Psi^p = b^p(t, x_i, \ldots \overset{(k-1)}{x_i})$, а для связей произвольного вида (6) - $\Psi^p = \frac{\partial \varphi^p}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^p}{\partial x_i} \dot{x}_i + \ldots + \frac{\partial \varphi^p}{\partial \overset{(k-1)}{x_i}}$.

Анализ уравнений (8) показывает, что для выполнения неполной программы движения (5) достаточно определить k-градиентные части функции $\overset{(r)}{\vec{R}}_{у.с.}$. Естественно, что при этом управление *может быть и не оптимальным*. “Задаваемая часть управления” в рамках программы движения определяется только видом функций $\vec{T}_k^p$. Заметим, что введение в систему части управления, соответствующей функций $\vec{T}_k^p$, при разных видах последней приводит к разным законам движения системы. Заметим также, что *k*-градиентное управление соответствует так называемым “идеальным” по Гартунгу - Добронравову связям [3].

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

4.1.ВВЕДЕНИЕ

Очевидно, что при наличии даже небольшого числа материальных точек в составе системы, уравнения (8) являются практически не решаемыми. В рамках научной традиции возникает вопрос о переходе от системы уравнений (8) к эквивалентной ей аналитической системе в обобщенных координатах. Таким образом, осуществляется "*переход от механики материальных точек к механике движений взаимодействующих парциальных динамических подсистем, образующих систему*" [10]. Здесь возможен ряд ковариантных форм уравнений движения [4,5,8], таких как: R_nQ, R_nA, R_nL *и ряд других.*
R_nQ -форма является формой *уравнений движения в обобщенных силах* (УДОС в [6,8]).
R_nA -форма подобна по виду уравнениям Аппеля ([5]).
R_nL - форма подобна по виду уравнениям Лагранжа 2-го рода [5].
R_nGA - форма подобна по виду уравнениям Аппеля, записанным через *s-ю* функцию Гаусса - *Принуждение s-го порядка*.
R_nGL форма подобна по виду уравнениям Лагранжа 2-го рода, записанным через *s-ю* функцию Гаусса.
$R_nQ^{(r)}$ - наиболее общая ковариантная форма *уравнений движения в обобщенных силовых факторах.*

Как уже было сказано выше, положение системы задается в данный момент времени радиус-вектором $\vec{x}$ *ИТ* в евклидовом пространстве E_{3N}. “Соотношение

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{x}\left(t, q^j\right) \\ j = 1,2,\ldots,n \end{cases}, \tag{9}$$

выражающее декартовы координаты через обобщенные, выделяет в E_{3N} риманово многообразие R_n. Задача состоит в представлении движения материальной системы с помощью терминов геометрии R_n“ [10]. Последнее становится возможным в силу того, что для голономных механических систем “с *n* степенями свободы (*подвижности*!) исходным пространством, где задаются скорость, ускорение и обобщенные силы, считается касательное к R_n пространство E_n” [4,10]. Здесь основные векторы $\vec{F}, \vec{\Phi} = -M\ddot{\vec{x}}$, входящие в классические аналитические формы уравнений движения, могут быть представлены согласно [4,7,10] как

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} Q_i^F \vec{e}^{\,i}, \quad \vec{\Phi} = -M \sum_{i=1}^{n} \left(\ddot{\vec{x}}\right)_i \vec{e}^{\,i} = \sum_{i=1}^{n} Q_i^{\Phi} \vec{e}^{\,i} \,. \tag{10}$$

Здесь:
Q_i^F - i - я обобщенная сила; Q_i^{Φ} - i - я -обобщенная сила инерции;

$\vec{e}^{\,i}$ - координатные векторы взаимного базиса в касательном пространстве E_n [3,10].

$$\vec{e}^{\,i} = \sum_{j=1}^{n} g^{ij}\vec{e}_j; \quad \vec{e}_j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}^j} = \ldots = \frac{\partial \overset{(k-1)}{\vec{x}}}{\partial \overset{(k-1)}{q^j}} = \frac{\partial \overset{(k)}{\vec{x}}}{\partial \overset{(k)}{q^j}} = \frac{\partial \overset{(k+1)}{\vec{x}}}{\partial \overset{(k+1)}{q^j}} = \ldots; \qquad (11)$$

g^{ij} - контравариантные компоненты метрического тензора пространства конфигураций R_n, определяемые выражением для кинетической энергии системы [10].

Для вывода аналитических форм уравнений движения воспользуемся системой уравнений (8), в которой k-градиентные части $\overset{(r)}{\vec{R}}_{у.с.}$ определяются через неопределенные множители Лагранжа λ_p [11]. Только при таком способе решения неголономной задачи имеет место возможность вычисления обобщенных сил инерции и подобных физических величин - мер движения, *по алгоритмам вычисления этих величин для голономных систем*. Здесь неголономное движение описывается в терминах голономного движения, а наличие $\overset{(r)}{\vec{R}}_{у.с.}$ выделяет в R_n подмножество “гладких движений”. В этом случае, например, Q_i^{Φ} будет вычисляться по процедурам Лагранжа, Нильсена, Аппеля и.т.д. [3-5]:

$$Q_i^{\Phi} = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i}\right] = -\left[\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}^i} - 2\frac{\partial T}{\partial q^i}\right] = -\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}^i} = \ldots \qquad (12)$$

T-кинетическая энергия системы; S-энергия ускорений – функция Аппеля[3].

Для большого класса задач динамики систем, состоящих из твердых тел, можно предложить, удобный на практике, следующий способ вычисления Q_j^{Φ}. Пусть материальная система состоит из N точек, которые группируются в L тел, механически связанных друг с другом. Исходя из принципа декомпозиции [6], представим Q_j^{Φ} как сумму обобщенных сил инерции p-х тел

$$Q_j^{\Phi} = \sum_{p=1}^{L} Q_{jp}^{\Phi}. \qquad (13)$$

Тогда, согласно [6], получим следующее выражение Q_j^{Φ} отдельного твердого тела:

$$\begin{aligned} Q_j^{\Phi} = -\sum_{\alpha=1}^{3}\Bigg\{ & m\ddot{x}_{c\alpha}\frac{\partial x_{c\alpha}}{\partial q^j} + \Big[J_{\alpha\alpha}\varepsilon_\alpha - J_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta - \omega_\gamma\omega_\alpha) - J_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\gamma + \omega_\alpha\omega_\beta) - \\ & - J_{\beta\gamma}(\omega_\beta^2 - \omega_\gamma^2) - (J_{\beta\beta} - J_{\gamma\gamma})\omega_\beta\omega_\gamma\Big]\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q^j}\Bigg\}. \end{aligned} \qquad (14)$$

Здесь α, β, γ принимают значения 1, 2, 3 или x, y, z и переставляются по правилу циклической перестановки: $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha \to \ldots$ m - масса тела; $\ddot{x}_{c\alpha}$ - α компонента ускорения центра масс тела; $J_{\alpha\alpha}$ и другие - компоненты тензора инерции тела, вычисляемого относительно подвижных осей, связанных с телом и проходящих через его центр масс; ω_α, ε_α... - проекции угловой скорости и углового ускорения тела на оси α, β, γ. В этой формуле $\ddot{x}_{c\alpha}$, ω_α, ε_α должны быть представлены как функции переменных $t, q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j$.

Формулу (14) можно переписать в векторной форме.

$$Q_j^{\Phi} = -\left(\frac{\partial\ S_c}{\partial\ \dot{q}^i}\right) - \left(\vec{e}_j \cdot \hat{J}_c \cdot \vec{\varepsilon}\right) - \left(\left[\vec{e}_j \times \vec{\omega}\right] \cdot \hat{J}_c \cdot \vec{\omega}\right). \tag{15}$$

Здесь $\cdot\, \hat{J}_c$ - тензор инерции тела.

При решении задач иногда удобно брать в качестве полюса не центр масс, а центр жесткости или какую-либо другую точку *A*. В этом случае формула для вычисления обобщенной силы Q_j^{Φ} будет иметь вид:

$$Q_j^{\Phi} = -\left(\frac{\partial\ S_c}{\partial\ \dot{q}^i}\right) - m \cdot \left[\vec{e}_j \times \vec{\omega}\right] \cdot \left[\vec{\omega} \times \vec{r}_c\right] - m\vec{a}_A \cdot \left[\vec{e}_j \times \vec{r}_c\right] - \left(\vec{e}_j \cdot \hat{J}_A \cdot \vec{\varepsilon}\right) - \left(\left[\vec{e}_j \times \vec{\omega}\right] \cdot \hat{J}_A \cdot \vec{\omega}\right) \tag{16}$$

Рассмотрим, например, вычисление Q_j^{Φ} для простейших движений твердого тела на основе (14). В результате получим, например,

а) для поступательного движения:

$$Q_j^{\Phi} = -\left(\frac{\partial\ S_c}{\partial\ \dot{q}^i}\right) \tag{17}$$

б) для вращения вокруг неподвижной оси *z*, проходящей через точку *O*:

$$Q_j^{\Phi} = -J_{oz}\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial q^j} = -J_{oz}\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}^j} = -J_{oz}\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \ddot{q}^j}\ ; \tag{18}$$

в) для плоского движения:

$$Q_j^{\Phi} = -\left(m\vec{a}_c \cdot \frac{\partial\ \vec{r}_c}{\partial\ q^j}\right) - J_{Cz}\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial q^j}\ ; \tag{19}$$

г) для сферического движения:

$$\begin{gathered} Q_j^{\Phi} = -\sum_{\alpha=1}^{3} \Big[J_{\alpha\alpha}\varepsilon_\alpha - J_{\alpha\beta}\left(\varepsilon_\beta - \omega_\gamma\omega_\alpha\right) - J_{\alpha\gamma}\left(\varepsilon_\gamma + \omega_\alpha\omega_\beta\right) - \\ - J_{\beta\gamma}\left(\omega_\beta^2 - \omega_\gamma^2\right) - \left(J_{\beta\beta} - J_{\gamma\gamma}\right)\omega_\beta\omega_\gamma\ \Big]\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q^j} \end{gathered} \tag{20}$$

Выражения (17-20), являются конечными и, естественно, тождественными тому, что получается в результате использования процедур Лагранжа, Аппеля и т.д. для их вычисления.

Обозначенные выше аналитические формы уравнений движения получим по единой классической процедуре *путем скалярного умножения системы уравнений (8) на координатные векторы* $\vec{e}_j$, *представленные в той или иной форме (11) с последующими несложными алгебраическими и дифференциальными преобразованиями*.

R_n Q – форма уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d^{(r)}}{dt^{(r)}}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Q_i^{\Phi}+Q_i^{F}\right)\vec e^{\,i}\right]\vec e_j+\left[\sum\limits_{p\le n-1}(\lambda_p\dfrac{\partial\varphi^p}{\partial \overset{(k)}{x}}+\vec T_k^{\,p}(t,x_i,\dots\overset{(k)}{x_i}))\right]\vec e_j=0 \\ \dfrac{df^p}{dt}=\sum\limits_{j=1}^{n}\overset{(k+1)}{q^j}\dfrac{\partial f^p}{\partial \overset{(k)}{q^j}}+W^p(t,q^j,\dots,\overset{(k)}{q^j})=0 \\ i,j=1,2,\dots,n,\quad p<n\,,\quad q=1,2, \\ \text{если}\ \ k\le 1,\ \text{то}\ \ r=0,\ \text{если}\ \ k\ge 2,\ \text{то}\ \ r=k-q. \end{cases} \tag{21}$$

$R_n A$ – форма уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K_{[s]}}{\partial \overset{(s)}{q^j}}=Q^{(r)}_{j(F)}+\sum\limits_{p\le n-1}(\lambda_p\dfrac{\partial f^p}{\partial \overset{(k)}{q^j}}+Q^{(r)}_{j(T^p)}) \\ \dfrac{df^p}{dt}=\sum\limits_{j=1}^{n}\overset{(k+1)}{q^j}\dfrac{\partial f^p}{\partial \overset{(k)}{q^j}}+W^p(t,q^j,\dots,\overset{(k)}{q^j})=0 \\ j=1,2,\dots,n,\ \ p<n,\quad s=r+2,\ \ q=1,2\,, \\ \text{если}\ \ k\le 1,\ \text{то}\ \ r=0,\ \text{если}\ \ k\ge 2,\ \text{то}\ \ r=k-q. \end{cases} \tag{22}$$

Здесь, согласно [5,7,8], K_s - *кинэта* есть универсальная динамическая скалярная мера движения s-го порядка:

$$K_s=\frac{M\left(\overset{(s)}{\vec x}\right)^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{N}m_\ell\left(\overset{(s)}{\vec r_\ell}\right)^2. \tag{23}$$

Заметим, что $K_1=T$ есть кинетическая энергия системы а $K_2=S$ - энергия ускорений. Для кинэты справедлива теорема типа теоремы Кёнига:

$$K_s=K_s^{(c)}+K_s^{(i/c)} \tag{24}$$

$Q^{(r)}_{j(\ )}$ *-обобщённый силовой фактор r –го порядка:*

$$Q^{(r)}_{j(F)}=(\overset{(r)}{\vec F}\cdot\vec e_j),\qquad Q^{(r)}_{j(T^p)}=(\vec T_k^{\,p}\cdot\vec e_j) \tag{25}$$

Отметим, что $Q^{(0)}_{j(F)}=Q_j^F$ и, что при r=0 уравнения движения в R_nQ -форме превращаются в обычные уравнения движения в обобщенных силах [6] а уравнения движения в R_nA-форме – в уравнения Аппеля.

R_nL – форма уравнений

Рассмотрим R_nL – форму уравнений движения. Она выводится аналогично предыдущим и имеет вид

$$\begin{cases} \hat{\Lambda}_j^{(r+1)}(K_{(r+1)}) = Q_{j(F)}^{(r)} + \sum\limits_{p\le n-1}(\lambda_p \dfrac{\partial f^p}{\partial \overset{(k)}{q}{}^j} + Q_{j(T^p)}^{(r)}) \\ \dfrac{df^p}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} \overset{(k+1)}{q}{}^j \dfrac{\partial f^p}{\partial \overset{(k)}{q}{}^j} + W^p(t, q^j, \ldots, \overset{(k)}{q}{}^j) = 0 \\ j = 1,2,\ldots,n, \;\; p < n, \;\; q = 1,2, \\ если \;\; k \le 1, \;\; то \;\; r = 0, \;\; если \;\; k \ge 2, \;\; то \;\; r = k - q \end{cases} \tag{26}$$

Здесь $\hat{\Lambda}_j^{(r+1)} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial}{\partial \overset{(r+1)}{q}{}^j}\right) - \dfrac{1}{r+1}\dfrac{\partial}{\partial \overset{(r)}{q}{}^j}$ - оператор Эйлера-Лагранжа (r+1) порядка [5,7]**.** Обратим внимание на то, что при r=0 уравнения (15) становятся уравнениями Лагранжа 2-го рода.

B R

B $R_nQ^{(r)}$ – форма уравнений

(в Обобщённых Силовых Факторах)

$$\begin{cases} Q_{\Phi j}^{(r)} + Q_{j(F)}^{(r)} + Q_{\lambda j}^{(r)} = 0 \\ \dfrac{df^p}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} \overset{(k+1)}{q}{}^j \dfrac{\partial f^p}{\partial \overset{(k)}{q}{}^j} + W^p(t, q^j, \ldots, \overset{(k)}{q}{}^j) = 0 \\ j = 1,2,\ldots,n, \;\; p < n, \;\; q = 1,2, \\ если \;\; k \le 1, \;\; то \;\; r = 0, \;\; если \;\; k \ge 2, \;\; то \;\; r = k - q. \end{cases} \tag{27}$$

Здесь, *обобщённые силовые факторы инерции* $Q_{\Phi j}^{(r)}$ и $Q_{\lambda j}^{(r)}$**,** согласно [7,8], равны:

$$Q_{\Phi j}^{(r)} = -\frac{\partial K_{(s)}}{\partial \overset{(s)}{q}{}^j} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \overset{(r+1)}{q}{}^j}(K_{(r+1)})\right) - \frac{1}{r+1}\frac{\partial K_{(r+1)}}{\partial \overset{(r)}{q}{}^j} = \ldots, \tag{28}$$

$$\begin{cases} j = 1,2,\ldots,n, \;\; s = r+2, \;\; q = 1,2, \\ r = 0 \;\; при \;\; k \le 1, \;\; r = k - q \;\; при \;\; k \ge 2 \end{cases}$$

$$Q_{\lambda j}^{(r)} = \sum_{p\le n-1}(\lambda_p \frac{\partial f^p}{\partial \overset{(k)}{q}{}^j} + Q_{j(T^p)}^{(r)}). \tag{29}$$

Отметим, что при r=0 УДОСФ эквивалентны УДОС [6].

R_nR_sA, $R_n GA$ и $R_n GL$ – формы уравнений

Рассмотрим ряд малоизвестных ковариантных форм записи уравнений движения, полезных при исследовании свойств движений систем.

Если ввести *характеристическую функцию* R_s, определяющую состояние движения системы при *векторе задаваемых сил* $\vec{F} = \vec{F}(t, q^j, \dot{q}^j)$ как

$$R_s = K_{(s)} - Q^{(r)}_{j(F)} \cdot \overset{(s)}{q}{}^j \,, \tag{30}$$

Тогда $R_n R_s A$,*– форма уравнений* примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_s}{\partial \overset{(s)}{q}{}^j} = \sum\limits_{p \le n-1} \left(\lambda_p \dfrac{\partial f^p}{\partial \overset{(k)}{q}{}^j} + Q^{(r)}_{j(T^p)}\right) \\ \dfrac{df^p}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} \overset{(k+1)}{q}{}^j \dfrac{\partial f^p}{\partial \overset{(k)}{q}{}^j} + W^p(t, q^j, \dots, \overset{(k)}{q}{}^j) = 0 \\ j = 1,2,\dots,n, \ \ p < n, \ \ s = r+2, \ \ q = 1,2, \\ \textit{если} \ \ k \le 1, \ \textit{то} \ \ r = 0, \ \textit{если} \ \ k \ge 2, \ \textit{то} \ \ r = k - q. \end{cases} \tag{31}$$

Нетрудно показать, что

$$R_s = Z_{(r)}, \tag{32}$$

где $Z_{(r)}$ - зависящая квадратично от $\overset{(k)}{q}{}^j$ часть функции Z_r - *Принуждения s-го порядка*. При этом функция Z_0 есть *Принуждение по Гауссу* Zw [3,4,].

Действительно,

$$R_s = \frac{M(\overset{(r)}{\vec{a}})^2}{2} - (\overset{(r)}{\vec{F}} \cdot \vec{e}_j)\overset{(s)}{q}_j = \frac{M(\overset{(r)}{\vec{a}})^2}{2} - (\overset{(r)}{\vec{F}} \cdot \overset{(r)}{\vec{a}}) =$$
$$= \left(\frac{M(\overset{(r)}{\vec{a}})^2}{2} - (\overset{(r)}{\vec{F}} \cdot \overset{(r)}{\vec{a}}) + \frac{(\overset{(r)}{\vec{F}})^2}{2M}\right)_{(s)} = Z_{(r)} \tag{33}$$

С учётом этого и того, что $\dfrac{\partial Z_{(r)}}{\partial \overset{(s)}{q}{}^j} = \dfrac{\partial Z_r}{\partial \overset{(s)}{q}{}^j}$ получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z_r}{\partial \overset{(s)}{q}{}^j} = \sum\limits_{p \le n-1} \left(\lambda_p \dfrac{\partial f^p}{\partial \overset{(k)}{q}{}^j} + Q^{(r)}_{j(T^p)}\right) \\ \dfrac{df^p}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} \overset{(k+1)}{q}{}^j \dfrac{\partial f^p}{\partial \overset{(k)}{q}{}^j} + W^p(t, q^j, \dots, \overset{(k)}{q}{}^j) = 0 \\ j = 1,2,\dots,n, \ \ p < n, \ \ s = r+2, \ \ q = 1,2, \\ \textit{если} \ \ k \le 1, \ \textit{то} \ \ r = 0, \ \textit{если} \ \ k \ge 2, \ \textit{то} \ \ r = k - q. \end{cases} \tag{34}$$

Заметим, что возможна и R_n *GL – форма* уравнений. Введение характеристической функции $R_{r+1} = Z_{(r-1)}$ для систем с *r>0* при *векторе задаваемых сил* вида $\vec{F} = \vec{F}(t, q^j)$ позволяет записать уравнения движения в виде

$$\begin{cases} \hat{\Lambda}_j^{(r+1)}(Z_{(r-1)}) = \sum\limits_{p \le n-1} \left(\lambda_p \dfrac{\partial f^p}{\partial \overset{(k)}{q^j}} + Q^{(r)}_{j(T^p)}\right) \\ \dfrac{df^p}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} \overset{(k+1)}{q^j} \dfrac{\partial f^p}{\partial \overset{(k)}{q^j}} + W^p(t, q^j, \ldots, \overset{(k)}{q^j}) = 0 \\ j = 1,2,\ldots,n, \ \ p < n, \ \ q = 1,2, \\ \text{если } \ k \le 1, \ \text{то } \ r = 0, \ \text{если } \ k \ge 2, \ \text{то } \ r = k - q \end{cases} \tag{35}$$

4.2 ПРИМЕРЫ

Для иллюстрации теории приведем несколько простых модельных примеров управления движением космических аппаратов с нелинейным по ускорению или линейными по резкости-рывку. Актуальность такого рода задач была подтверждена в докладах секции “ Механика космического полёта“ на 9-м Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород – 2006г.

П.1. Покажем, как составляются уравнения движения управляемого по неполной программе аппарата, влетающего в сильно наэлектризованную магнитосферу космического объекта и приобретающего электрический заряд. Проиллюстрируем это на это на модельном примере. Пусть в момент $t = 0$ объект массы m, имеющий заряд q, оказывается в зоне скрещенных переменного электрического $\vec{E} = (E_0 + \varepsilon t)\vec{j}$ и постоянного магнитного $\vec{B} = B_0 \vec{k}$ полей, и начинает движение по оси x со скоростью v_0. Будем считать, что программа испытаний требует, например, линейного изменения во времени энергии ускорений $S = ct$. Тогда уравнения движения в R_2A форме при a - градиентном управлении примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K_3}{\partial \ddot{x}} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial \ddot{x}} + Q_x^{(1)} \\ \dfrac{\partial K_3}{\partial \ddot{y}} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial \ddot{y}} + Q_y^{(1)} \\ \ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} - c = 0 \end{cases} \tag{36}$$

Здесь $K_3 = \dfrac{m}{2}(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)$, $Q_{x,y}^{(1)} = (\vec{F} \cdot \vec{e}_{x,y})$, $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, $f = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - S(t) = 0$,

$Q_x^{(1)} = q(\varepsilon + \dot{y}B), \ \ Q_y^{(1)} = 0$.

Конечная форма уравнений разомкнутой модели управления движением объекта примет вид

$$\begin{cases} \dddot{x} = \dot{\lambda}\ddot{x} + q(\varepsilon + \ddot{y}B)/m \\ \dddot{y} = \dot{\lambda}\ddot{y} \\ \dddot{x}\,\ddot{x} + \dddot{y}\,\ddot{y} = c/m \end{cases} \tag{37}$$

В результате численного решения системы уравнений (37) получим как параметры движения космического аппарата, так и его траекторию. Она представлена на Рис. 1.

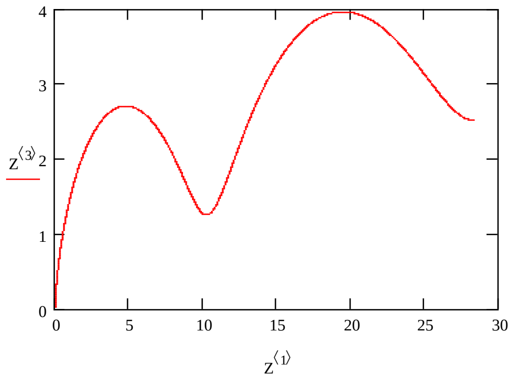

Рис1.

П.2. Рассмотрим задачу о специализированном ориентационном маневре искусственного спутника земли (ИСЗ) на орбите, совершаемого по неполной дифференциальной программе движения. Осуществим, например, $\vec{\varepsilon}$ - градиентное управление. Оно задается программой движения:

$$f = (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}) - \vec{\varepsilon}_0^{\,2}(t) = 0, \tag{38}$$

где $\vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение ИСЗ.

Динамические уравнения движения составим в "аппелево-подобной” форме

$$\partial K_3 / \partial \dot{\varepsilon}_j = \lambda \partial f / \partial \varepsilon, \qquad j = x, y, z \tag{39}$$

Здесь K_3 есть кинета третьего порядка. В качестве обобщенных координат возьмем углы Эйлера: φ, ψ, θ.

Замкнутая система уравнений программного движения ИСЗ примет вид:

$$\begin{cases} I_x\dot{\varepsilon}_x - \omega^2 I_x\omega_x + I_2(\omega_y\varepsilon_z + 2\varepsilon_y\omega_z) - I_3(\omega_z\varepsilon_y + 2\varepsilon_z\omega_y) - 2\dot{\lambda}\varepsilon_x = 0 \\ I_y\dot{\varepsilon}_y - \omega^2 I_y\omega_y + I_3(\omega_z\varepsilon_x + 2\varepsilon_z\omega_x) - I_1(\omega_x\varepsilon_z + 2\varepsilon_x\omega_z) - 2\dot{\lambda}\varepsilon_x = 0 \\ I_z\dot{\varepsilon}_z - \omega^2 I_z\omega_z + I_1(\omega_x\varepsilon_y + 2\omega_y\varepsilon_x) - I_2(\omega_y\varepsilon_x + 2\varepsilon_y\omega_x) - 2\dot{\lambda}\varepsilon_z = 0 \\ (\varepsilon_x \cdot \dot{\varepsilon}_x + \varepsilon_y \cdot \dot{\varepsilon}_y + \varepsilon_z \cdot \dot{\varepsilon}_z) - \varepsilon_0 \cdot \dot{\varepsilon}_0(t) = 0 \\ \omega_x = -\dot{\psi}\sin\theta\,\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi, \qquad \varepsilon_x = \dot{\omega}_x, \\ \omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \qquad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y, \\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\varphi}, \qquad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z, \end{cases} \tag{40}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}(-I_x + I_y + I_z); \quad \mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}(I_x - I_y - I_z); \quad \mathrm{I}_3 = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z).$$

I_x, I_y, I_z -главные центральные моменты инерции ИСЗ.

Система уравнений (40) была приведена к безразмерной форме. В результате ее численного решения в Mathcad были получены основные характеристики ориентационного маневра ИСЗ.

П.3. Составим уравнения движения космического аппарата (КЛА) массы m, совершающего мягкую посадку с постоянным по модулю ускорением a_0 на космический объект, движущийся по плоской эллиптической орбите в поле условно неподвижного гравитационного центра массы M. Задачу будем решать в полярных координатах r, φ. Запишем уравнение неполной дифференциальной программы движения, задаваемой выражением

$$f = \vec{a}^2 - a_0^2 = a_r^2 + a_\varphi^2 + a_0^2 = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)^2 + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)^2 - a_0^2 = 0 \qquad (41),$$

а уравнения движения в R_sL форме:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K_2}{\partial \dddot{r}}\right) - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial K_2}{\partial \ddot{r}} = Q_r^{(1)} + \dot{\lambda}\dfrac{\partial f}{\partial \ddot{r}} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K_2}{\partial \dddot{\varphi}}\right) - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial K_2}{\partial \ddot{\varphi}} = Q_\varphi^{(1)} + \dot{\lambda}\dfrac{\partial f}{\partial \ddot{\varphi}} \\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{df}{dt} = \left(\vec{a}\cdot\dot{\vec{a}}\right) = 0 \end{cases} \qquad (42).$$

Здесь $K_2 = \dfrac{m}{2}[(\dddot{r} - r\dot{\varphi})^2 + (r\dot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2]$,

$$Q_r^{(1)} = (\dot{\vec{F}}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}) = 2\chi m\frac{\dot{r}}{r^3}, \quad Q_\varphi^{(1)} = (\dot{\vec{F}}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}) = -\chi m\frac{\dot{\varphi}}{r},$$

где $\vec{F} = -\gamma\dfrac{Mm}{r^2}\vec{r}_0 = -\chi m\dfrac{\vec{r}_0}{r^2}$.

Конечная форма уравнений (42) примет вид:

$$\begin{cases} \dddot{r} - 2\eta\ddot{r} - 2\mu\dot{r} = 3r\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + (3\dot{r} - 2\eta r)\dot{\varphi}^2 \\ \dddot{\varphi} - 2\eta\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^3 = -2(\dot{r}/r)\ddot{\varphi} - 3(\ddot{r}/r)\dot{\varphi} + 2(\dot{r}/r)((\dot{r}/r) - 2\eta)\dot{\varphi} \\ \dddot{r}\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) + \dddot{\varphi}r\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right) + \left(r\dot{r}\dot{\varphi}^4 + 2r^2\dot{\varphi}^3\ddot{\varphi} + 3r\dot{r}\ddot{\varphi}^2 + 6\dot{r}^2\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}\right) = 0 \end{cases}, \qquad (43)$$

$\eta = \dot{\lambda}/m, \quad \mu = \gamma M/r^3$

Система уравнений (43) решалась в Mathcad, в результате чего были определены основные кинематические характеристики процесса движения КЛА.

На Рис.2 приведена траектория мягкой посадки КЛА на космический объект.

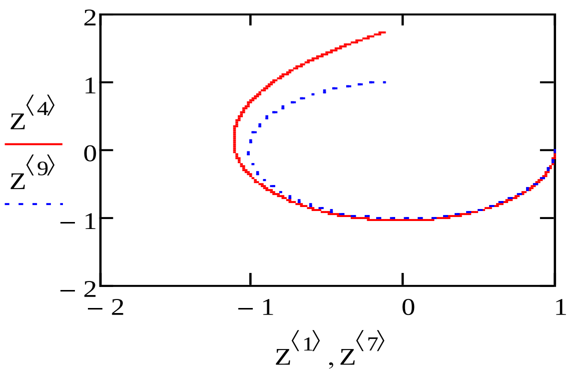

Рис.2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, отметим, что возможен и ряд других ковариантных форм уравнений движения систем с дифференциальными связями высших порядков. Однако в данной работе они не рассматриваются. Вопрос о практической ценности представленных форм уравнений движения требует дополнительного исследования и будет обсуждаться в других публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Неймарк Ю.И.** Динамика неголономных систем / Ю.И.Неймарк, Н.А.Фуфаев — М.: Наука, 1967. — 519с.

[2] **Коренев Г.В.** Введение в механику управляемого тела: монография / Г.В.Коренев. - М.: Наука, 1964 - 568с.

[3] **Добронравов В.В.** Основы механики неголономных систем: монография / В.В.Добронравов. - М.: Высшая школа, 1970. – 269с.

[4] **Зегжда С.А.** Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики: монография / С.А.Зегжда, Ш.Х.Солтаханов, М.П.Юшков. — СПб: Изд-во СПбГУ, 2002. - 275с.

[5] **Родионов А.И.** Уравнения движения неголономных систем высших порядков / А.И.Родионов // Сб. науч. трудов НГТУ. - Новосибирск. - Изд-во НГТУ, - 1997. - № 2(7) - С.85-96.

[6] **Родионов А.И.** Составление и исследование уравнений движения голономных и неголономных систем методом обобщенных сил. / П.И.Остроменский, А.И.Родионов // Научный вестник НГТУ. - Новосибирск. - Изд-во НГТУ. - 1997. - № 3, С.121-140.

[7] **Родионов А.И.** К динамике мехатронных систем с неполными дифференциальными программами движения / А.И. Родионов // Вестник СГГА - Выпуск 7, раздел "Физика". - Новосибирск: - Изд-во СГГА, - 2002. - С. 205-211.

[8] **Rodionov A.I.** On dynamics of mechatronic systems with incomplete differential programs of motion / A.I. Rodionov, V.M. Kaveshnikov // IFToMM 2004.The 11 World Cong. in Mech. and Machine Science, Tianjin, China,1-4 april 2004: proceeding. - Tianjin, 2004. - Vol.3 "Mechatronics" - P.1331-1335.

[9] **Родионов А.И.** Разомкнутые модели управления движением транспортных систем третьего порядка / А.И. Родионов, Г.А. Сырецкий // Транспорт: Наука, техника, управление - М: Изд-во РАН ВИНИТИ, 2011 - №4. - С. 12-15.

[10] **Артоболевский И.И.** Теория механизмов и машин: учебник / И.И.Артоболевский - М.: Наука, 1975. - 639с.

[11] **Лурье А.И.** Аналитическая механика: учебник / А.И.Лурье. - М.: ГИФ-МЛ, 1961. - 824с.

[12] **Суслов Г.К.** Теоретическая механика: учебник / Г.К.Суслов - М.-Л.: ГИТ-ТЛ, 1946. - 655с.

Родионов Андрей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент. Доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов Новосибирского Государствен-

ного Технического Университета, профессор кафедры основ приборостроения Сибирской Государственной Геодезической Академии, член-корреспондент Международной Славянской Академии наук, образования, искусств и культуры, член Петровской Академии Наук и Искусств. Основные направления научных исследований – теоретическая и прикладная механика, механика деформируемого твердого тела, общая и теоретическая физика. Имеет более170 научных публикаций и А.С., один патент, несколько учебных пособий.
E-mail: teormech@ngs.ru   Тел. (383)-3-461-777

A.I. Rodionov
The equations of analytical dynamics of systems with differential constraints of any orders

In article the variant of Extension of the Classical mechanics describing dynamics nonholonomic and controlled systems with differential constraints of any orders is presented. The motion of such systems is considered as motion of not free Affix. This Affix motions in E_{3N} - space on diversity R_n limited to differential constraints. The vector equation of its motion the equations of LaGrange is deduced. In the uniform image a series of analytical covariant forms of the equations of movement is under construction:" In the generalized forces ", similar to the Appell equations, the equations of LaGrange and a number of others, less known. As generalization of all forms of the equations the motion equations in the generalized force factors are presented. A number of new kinetic measures of motion of system as whole is entered: kineta of *r-th* order as generalization of kinetic energy and Appell functions. New measures of mechanical influence on system are entered: “forces factors” of set, “forces factors of inertia and forces factors of control constraints”, their “generalized forces factors”. These equations are dynamics basis nonholonomic systems and systems of program motions without taking into account control errors – the open-looped models of control. The examples are given.

Key words: systems with differential constraints of any orders, Affix; kineta; the forces factors of reactions of control constraints; the equations of motion of Affix and their analytical covariant forms full and incomplete differential programs of motion; the open-looped models of control.