Труды VIII Всероссийской Н-ТК «НАУКА. ПРОМЫШЛЕНННОСТЬ. ОБОРОНА». Новосибирск, НГТУ 18-20 апреля 2007, С438-443.

УДК 531.01

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НЕПОЛНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ПРОГРАММАМИ ДВИЖЕНИЯ

Новосибирский Государственный Технический Университет,
г. Новосибирск
А.И. Родионов, А.А Фарафонов

Введение

В докладе рассматриваются примеры задач динамики систем с неполными дифференциальными программами движения [1], начиная с нелинейных по ускорениям. К таким системам относятся, прежде всего, управляемые аэрокосмические системы [2], системы мехатроники и точной электромеханики. Уравнения движения таких систем выводятся в рамках Расширения Классической Механики на движение систем с неголономными связями высших порядков и являются основой разомкнутых моделей управления движением [1,3,4]. Результаты варианта Расширения Механики, предложенного Родионовым А.И., опубликованы, например, в работах [5-10].

Напомним "Appell – подобную" – R_sA и "LaGrange – подобную" – $R_s.L$ аналитические формы уравнений движения, наиболее известные при решении прикладных задач. Согласно нашим работам [5-9] они примут вид:

R_sA – форма

$$\begin{cases} \partial^j_{r+2}K_{r+2} = \lambda_p \partial^j_k f^p + Q_j^{(r)}(\vec{F}) + Q_j^{(r)}(\vec{T}) = 0 \\ \overset{(r+2)}{q^j}\;\partial^j_k f^p + W^p(t, q^j, \dots \overset{(k-1)}{q^j}) = 0 \\ j = 1,2\dots, s, \quad p \le s-1, \ q = 1,2, \\ если \ k \le 1, то \ r = 0, \ если \ k \ge 2, \ то \ r = k - q. \end{cases} \tag{1}$$

R_sL – форма

$$\begin{cases} \hat{\Lambda}_j^{(r+1)}(K_{(r+1)}) = \lambda_p \partial^j_k f^p + Q_j^{(r)}(\vec{F}) + Q_j^{(r)}(\vec{T}) \\ \overset{(r+2)}{q^j}\;\partial^j_k f^p + W^p(t, q^j, \dots \overset{(k-1)}{q^j}) = 0 \\ j = 1,2\dots, s, \quad p \le s-1, \ q = 1,2, \\ если \ k \le 1, то \ r = 0, \ если \ k \ge 2, \ то \ r = k - q. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь, согласно [5-9], физическая величина K_n есть универсальная динамическая мера движения Кинэта

$$K_n = M(\overset{(n)}{\vec{x}})^2 / 2 = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell (\overset{(n)}{\vec{r}_\ell})^2 , \tag{3}$$

$\overset{\wedge}{\Lambda}{}_j^{(r+1)} = \mathrm{d}_t \partial_{r+1}^{\,j} - (r+1)^{-1} \partial_r{}^j$ есть оператор Эйлера – Лагранжа *(r+1)* порядка, $Q_j^{(r)}$ есть обобщенный силовой фактор r – го порядка:

$$Q_j^{(r)} = (\overset{(r)}{\vec{F}} \cdot \vec{e}_j) = (\overset{(r)}{\vec{F}} \cdot \partial_0{}^j \vec{x}) = \sum_{\ell=1}^{N} (\overset{(r)}{f}_{\ell} \cdot \partial_0{}^j \vec{r}_\ell). \tag{4}$$

Заметим, что $K_1 = T$ является кинетической энергией системы, а $K_2 = S$ - функцией Аппеля - энергией ускорений [5].

ЗАДАЧИ

Рассмотрим ряд простейших задач построения разомкнутых моделей управления движением, иллюстрирующих нашу теорию на примерах из области космической механики.

Задача №1

Составим уравнения движения космического аппарата (КЛА) массы m, совершающего мягкую посадку с постоянным по модулю ускорением a_0 на космический объект, движущийся по плоской эллиптической орбите в поле неподвижного гравитационного центра массы M. Задачу будем решать в полярных координатах r, φ. Запишем уравнение неполной дифференциальной программы движения, задаваемой выражением

$$f = \vec{a}^2 - a_0^2 = a_r^2 + a_\varphi^2 + a_0^2 = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)^2 + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)^2 - a_0^2 = 0 \tag{5},$$

а уравнения движения в R_sL форме:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K_2}{\partial \ddot{r}}\right) - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial K_2}{\partial \dot{r}} = Q_r^{(1)} + \dot{\lambda} \dfrac{\partial f}{\partial \ddot{r}} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K_2}{\partial \ddot{\varphi}}\right) - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial K_2}{\partial \dot{\varphi}} = Q_\varphi^{(1)} + \dot{\lambda} \dfrac{\partial f}{\partial \ddot{\varphi}} \\ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{df}{dt} = \left(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}\right) = 0 \end{cases} \tag{6}.$$

Здесь $K_2 = \dfrac{m}{2}\,[(\ddot{r} - r\dot{\varphi})^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2\,]$, а $Q_r^{(1)} = (\dot{\vec{F}} \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r}) = 2\chi m \dfrac{\dot{r}}{r^3}$, $Q_\varphi^{(1)} = (\dot{\vec{F}} \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}) = -\chi m \dfrac{\dot{\varphi}}{r}$,

где $\vec{F} = -\gamma \dfrac{Mm}{r^2} \vec{r}_0 = -\chi m \dfrac{\vec{r}_0}{r^2}$.

Конечная форма уравнений (6) примет вид:

$$\begin{cases} \dddot{r} - 2\eta\ddot{r} - 2\mu\dot{r} = 3r\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + (3\dot{r} - 2\eta r)\dot{\varphi}^2 \\ \dddot{\varphi} - 2\eta\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^3 = -2(\dot{r}/r)\ddot{\varphi} - 3(\ddot{r}/r)\dot{\varphi} + 2(\dot{r}/r)((\dot{r}/r) - 2\eta)\dot{\varphi} \\ \dddot{r}\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) + \dddot{\varphi} r\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right) + \left(r\dot{r}\dot{\varphi}^4 + 2r^2\dot{\varphi}^3\ddot{\varphi} + 3r\dot{r}\ddot{\varphi}^2 + 6\dot{r}^2\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}\right) = 0 \end{cases}, \tag{7}$$

$\eta = \dot{\lambda}/m, \quad \mu = \gamma M/r^3$

Система уравнений (7) решалась в Mathcad 12, в результате чего были определены основные кинематические характеристики процесса движения КЛА. На Рис.1 приведена траектория посадки.

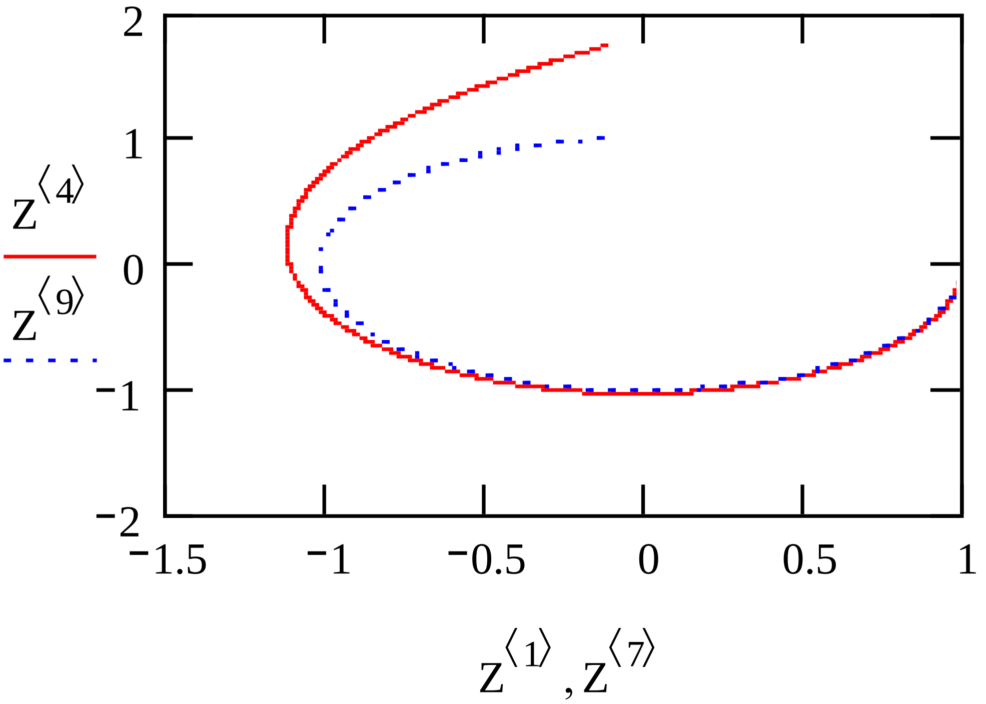

Рис.1.

Задача №2

Покажем, как составляются уравнения движения управляемого по неполной программе аппарата, влетающего в сильно наэлектризованную магнитосферу космического объекта и приобретающего электрический заряд. Проиллюстрируем это на это на модельном примере. Пусть в момент $t=0$ объект массы m, имеющий заряд q, оказывается в зоне скрещенных переменного электрического $\vec{E}=(E_0+\varepsilon t)\vec{j}$ и постоянного магнитного $\vec{B}=B_0\vec{k}$ полей, и начинает движение по оси x со скоростью v_0. Будем считать, что программа испытаний требует, например, линейного изменения во времени энергии ускорений $S=ct$. Тогда уравнения движения в R_2A форме при a - градиентном управлении примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K_3}{\partial \ddot{x}} = \dot{\lambda}\dfrac{\partial f}{\partial \ddot{x}} + Q_x^{(1)} \\ \dfrac{\partial K_3}{\partial \ddot{y}} = \dot{\lambda}\dfrac{\partial f}{\partial \ddot{y}} + Q_y^{(1)} \\ \ddot{x}\,\dddot{x} + \ddot{y}\,\dddot{y} - c = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Здесь $K_3=\dfrac{m}{2}(\dddot{x}^2+\dddot{y}^2)$, $Q_{x,y}^{(1)}=(\dot{\vec{F}}\cdot\vec{e}_{x,y})$, $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$, $f=\dfrac{m}{2}(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)-S(t)=0$,

$Q_x^{(1)} = q(\varepsilon + \dot{y}B), \quad Q_y^{(1)} = 0$.

Конечная форма уравнений разомкнутой модели управления движением объекта примет вид

$$\begin{cases} \dddot{x} = \dot{\lambda}\ddot{x} + q(\varepsilon + \ddot{y}B)/m \\ \dddot{y} = \dot{\lambda}\ddot{y} \\ \dddot{x}\,\ddot{x} + \dddot{y}\,\ddot{y} = c/m \end{cases} \tag{9}$$

В результате численного решения системы уравнений (9) получим как параметры движения космического аппарата, так и его траекторию. Последняя представлена на Рис. 2.

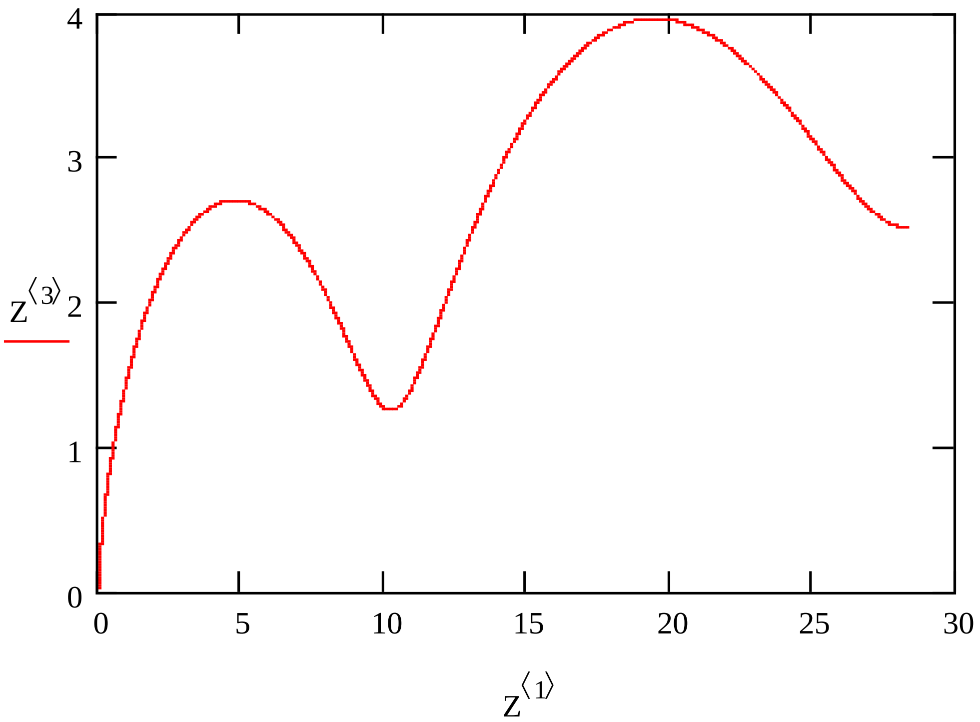

Рис2.

Задача №3

Решим задачу о специализированном ориентационном маневре ИСЗ на орбите, совершаемого по неполной дифференциальной программе движения. Осуществим, например, $\vec{\varepsilon}$ - градиентное управление. Оно задается программой движения:

$$f = (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}) - \vec{\varepsilon}_0^{\,2}(t) = 0, \tag{10}$$

где $\vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение ИСЗ.

Динамические уравнения движения составим в "аппелево-подобной" форме

$$\partial_3^j K_3 = \lambda \partial_2^j f, \quad \partial_3^j = \partial / \partial \dot{\varepsilon}_j, \quad j = x, y, z \tag{11}$$

Здесь K_3 есть кинета третьего порядка. В качестве обобщенных координат возьмем углы Эйлера: φ, ψ, θ.

Замкнутая система уравнений программного движения ИСЗ примет вид:

$$\begin{cases} I_x\dot{\varepsilon}_x - \omega^2 I_x\omega_x + I_2(\omega_y\varepsilon_z + 2\varepsilon_y\omega_z) - I_3(\omega_z\varepsilon_y + 2\varepsilon_z\omega_y) - 2\dot{\lambda}\varepsilon_x = 0 \\ I_y\dot{\varepsilon}_y - \omega^2 I_y\omega_y + I_3(\omega_z\varepsilon_x + 2\varepsilon_z\omega_x) - I_1(\omega_x\varepsilon_z + 2\varepsilon_x\omega_z) - 2\dot{\lambda}\varepsilon_x = 0 \\ I_z\dot{\varepsilon}_z - \omega^2 I_z\omega_z + I_1(\omega_x\varepsilon_y + 2\omega_y\varepsilon_x) - I_2(\omega_y\varepsilon_x + 2\varepsilon_y\omega_x) - 2\dot{\lambda}\varepsilon_z = 0 \\ (\varepsilon_x\cdot\dot{\varepsilon}_x + \varepsilon_y\cdot\dot{\varepsilon}_y + \varepsilon_z\cdot\dot{\varepsilon}_z) - \varepsilon_0\cdot\dot{\varepsilon}_0(t) = 0 \\ \omega_x = -\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi, \qquad \varepsilon_x = \dot{\omega}_x, \\ \omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \qquad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y, \\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\varphi}, \qquad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z, \end{cases} \tag{12}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}(-I_x + I_y + I_z); \quad I_2 = \frac{1}{2}(I_x - I_y - I_z); \quad I_3 = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z).$$

I_x, I_y, I_z -главные центральные моменты инерции ИСЗ.

Система уравнений (12) была приведена к безразмерной форме. В результате ее численного решения получены основные характеристики ориентационного маневра ИСЗ. В силу ограничений на объем публикации они не приводятся.

Библиографический список

1. Коренев Г.В. Введение в механику управляемого тела / Г.В. Коренев - М.: Наука, 1964, 568с.
2. Добронравов В.В. Аналитическая теория управления движения космических летательных аппаратов вокруг собственных центров масс / В.В.Добронравов // ”Механика космического полёта” - М.: Машгиз, 1969.
3. Добронравов В.В. Управляемые системы как системы с неголономными связями / В.В. Добронравов // "Механика” - М.: Оборонгиз, 1961. - № 104. - С.27-32
4. Галиулин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения / А.С. Галиулин и др. - М.: Наука, 1981.
5. Родионов А.И. Основания неголономной механики произвольных порядков / А.И. Родионов // Труды междунар. науч. - тех. конф. " Науч. основы высоких технологий" 1997, Новосибирск, Россия - Т.6. “Математика и физика”. - С. 62-64.
6. Родионов А.И. К динамике мехатронных систем с неполными дифференциальными программами движения / А.И. Родионов // Вестник СГГА. (Физика) - Новосибирск: Изд-во СГГА, - 2002. - Выпуск 7. - С. 205-211.
7. Rodionov A.I. On dynamics of mechatronic systems with incomplete differential programs of motion / A.I. Rodionov, V.M. Kaveshnikov // Proc. of 11 World Cong. in Mech. and Machine Science. April 1-4, 2004, Tianjin, China. -Vol.3, Mechatronics, - P. 1331-1335.
8. Родионов А.И. Динамика управляемых электромеханических систем высших порядков / А.И. Родионов // Труды Всеросс. науч.-тех. конф. “Наука. Промышленность. Оборона“ (20-22 апреля 2002г.) – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. - С.177-183.

9. Родионов А.И. Разомкнутые модели управления электромеханических и мехатронных систем высших порядков./ А.И.Родионов // Аннотации докладов 9-го всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, т.1., (22-28 августа 2006) - Нижний Новгород, 2006. – С.101.