УДК 531.01
А.И. Родионов
СГГА-НГТУ, Новосибирск Родионов А.И. К динамике мехатронных систем с неполными дифференциальными программами движения / А.И. Родионов // Вестник СГГА. (Физика) - Новосибирск: Изд-во СГГА, - 2002. - Выпуск 7. - С. 205-211.

К ДИНАМИКЕ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ С НЕПОЛНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ПРОГРАММАМИ ДВИЖЕНИЯ

В работе представлены неопубликованные материалы и излагаются элементы динамики мехатронных систем с неполными произвольными дифференциальными программами движения, описывающие с точки зрения теории управления так называемые “разомкнутые системы управления”. Излагается теорема о структуре r-ой-производной силового фактора реакций управляющих связей – программ движений. Приводятся две аналитических формы уравнений движения. Представлены общие теоремы динамики систем с дифференциальными связями. Формулируется расширение постулата Максвелла для управляемых электромеханических систем с неполными дифференциальными программами движения. На этой основе строятся уравнения движения таких систем.

мехатронные системы, неполные дифференциальные программы движения, голономные и неголономные связи, изображающая точка, уравнения движения, общие теоремы динамики, электромеханическая аналогия, расширение постулата Максвелла, уравнения типа Лагранжа-Максвелла.

1.ВВЕДЕНИЕ

Развитие в конце 20-го века мехатроники и авионики поставило вопрос об адекватных механических моделях движения систем с “неполными дифференциальными программами движения” [1]. Известно, что большой класс движений управляемых по программе систем может быть описан как класс с голономными и неголономными связями общего вида [1]. В рамках одного формализма эти связи могут быть определены как дифференциальные произвольных порядков. В мехатронике удерживающие связи, при помощи которых задана программа движений, называют управляющими связями, а уравнения связей – представлениями программ движений или кратко - программой движения [1]. Принято называть программу движения *полной*, если она однозначно определяет закон движения управляемого объекта. В противном случае ее называют *неполной*. Известно, что в Классической Механике вопрос о движении систем с полной программой движения принципиально решен [1,5]. При неполных дифференциальных программах движения задача может быть решена в рамках Расширения Классической Механики на движение таких систем. Результаты нашего варианта построения такого Расширения Механики изложены в работах [3,4]. В данной работе излагаются неопубликованные элементы динамики мехатронных систем с неполными дифференциальными программами движения без учета ошибок управления, описывающие с точки зрения теории управления так называемые "разомкнутые системы управления" [1].

2.ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ НЕПОЛНУЮ ПРОГРАММУ ДВИЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТАКИХ СИСТЕМ

Расширение Классической Механики на системы с произвольными дифференциальными связями наиболее просто может быть построено на основе подхода, связанного с описанием программного движения материальной системы как движения ее несвободной Изображающей Точки (*ИТ*) [3,4,7]. Эта точка имеет, согласно [3,4], массу M, равную массе системы, радиус-вектор $\vec{x}(x_i)$ и движется в пространстве E_{3N} по ограниченному дифференциальными связями многообразию R_n. Конфигурация и свойства последнего определяются n обобщенными координатами q^j, совокупность которых определяется как наличием неуправляющих связей, так и дифференциальными программами движения.
Построение Расширения Механики непосредственно связано с доказательством Основной Теоремы - теоремы о структуре r-производной Силового Фактора Реакций Связей [3], определяющей как "степень его гладкости", так и уравнения движения рассматриваемых систем.

ТЕОРЕМА:

Пусть движение системы определяется в R_n n обобщенными координатами $q^j : x_i = x_i(t, q^j),-$ и неполной дифференциальной программой движения, задаваемой системой уравнений

$$\begin{cases} f^p(t, q^j, \dot{q}^j, \dots, \overset{(k)}{q^j}) = \varphi^p(t, x_i, \dot{x}_i, \dots, \overset{(k)}{x_i}) = 0 \\ j = 1, 2, \dots, n; \dots i = 1,2,\dots 3N; \dots p < n. \end{cases} \tag{1}$$

Тогда

$$\overset{(r)}{\vec{R}} = \lambda_p \partial\varphi^p / \partial \overset{(k)}{\vec{x}} + \vec{T}_k(t, x_i, \dots \overset{(r+1)}{x_i}) = \overset{(r)}{R}_i \vec{i}_i \tag{2}$$

и замкнутая система уравнений программного движения *ИТ* имеет вид

$$\begin{cases} M \overset{(r+2)}{\vec{x}} = \overset{(r)}{\vec{F}} + \lambda_p \partial\varphi^p / \partial \overset{(k)}{\vec{x}} + \vec{T}_k ; \\ \overset{(r+2)}{\vec{x}} \lambda_p \partial\varphi^p / \partial \overset{(k)}{\vec{x}} + \Psi^p(t, x_i, \dots \overset{(r+1)}{x_i}) = 0; \\ r=0 \ if \ k=0,1, \ r=k-q \ if \ k>1. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь и далее по двойному немому индексу производится суммирование. $\overset{(r)}{\vec{R}}$ -r производная реакции управляющей связи *ИТ*. Задаваемая вектор-функция

$\vec{T}_{\text{k}} \perp \partial\varphi^p / \overset{(k)}{\vec{x}}$. Функции λ_p - множители связи Лагранжа, - находятся в результате решения системы (3). Здесь q=1 для нелинейных, а q=2 для линейных по $\overset{(k)}{x_i}$ связей. Для $\varphi^p = A_i^p(t,x_i,\ldots \overset{(k-1)}{x_i}) \overset{(k)}{x_i} + b^p(t,x_i,\ldots \overset{(k-1)}{x_i})$ - линейных по $\overset{(k)}{x_i}$ связей, функции-коэффициенты Ψ^p имеют вид $\Psi^p = b^p(t,x_i,\ldots \overset{(k-1)}{x_i})$, а для связей произвольного вида (1) - $\Psi^p = \partial\varphi^p / \partial t + \partial\varphi^p / \partial x_i + \ldots \partial\varphi^p / \overset{(k-1)}{x_i}$.

Несложное доказательство теоремы опускается из-за ограничений на объем статьи. Анализ выражения (2) показывает, что для выполнения неполной программы движения (1) *достаточно* определить k-градиентную часть функции $\overset{(r)}{\vec{R}}$. Естественно, что при этом управление может быть и не оптимальным. “Задаваемая часть управления” в рамках программы движения определяется только видом функции $\vec{T}_k$. Заметим, что введение в систему части управления, соответствующей функции $\vec{T}_k$, при разных видах последней приводит к разным законам движения системы. Заметим также, что k-градиентное управление соответствует так называемым “идеальным” по Гартунгу – Добронравову связям [6].

3.АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Очевидно, что при наличии даже небольшого числа материальных точек в составе системы, уравнения (3) являются практически не решаемыми. В рамках научной традиции возникает вопрос о переходе от системы уравнений (3) к эквивалентной ей аналитической системе в обобщенных координатах. Здесь возможен ряд форм уравнений движения [3,4], однако более привычными и традиционными будут две формы: R_nA , R_nL . R_nA -форма подобна по виду уравнениям Аппеля [6,7]. R_nL - форма подобна по виду уравнениям Лагранжа 2-го рода [6,7]. Согласно [3,4] они имеют вид:

R_nA -форма

$$\begin{cases} \partial K_{[s]} / \partial \overset{(s)}{q^j} = \lambda_p \partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j} + Q^{(r)}_{j(F)} + Q^{(r)}_{j(T)} \\ \overset{(s)}{q^j} \partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j} + W^p(t, q^j, \ldots, \overset{(s-1)}{q^j}) = 0 \\ i,j = 1,2,\ldots,n\,, \ \ p = 1,2,\ldots,m < n\,, \ \ s = r+2\,, \\ r = 0 \ \ if \ \ k \le 1\,, \ \ r = k\text{-}q \ \ if \ \ k > 1\,, \ \ q = 1,2. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь, согласно [3,4] K_s *-кинэта* есть универсальная динамическая мера движения s-го порядка:

$$K_s = M(\overset{(s)}{\vec{x}})^2/2 = (\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell (\overset{(s)}{\vec{r}_\ell})^2)/2. \tag{5}$$

$K_{[s]}$- часть кинэты, квадратично зависящая от $\overset{(s)}{q^j}$. Заметим, что $K_1 = T$ есть кинетическая энергия системы а $K_2 = S$ - энергия ускорений [6,7]. Для кинэты справедлива теорема типа теоремы Кенига:

$$K_s = K_s^{(c)} + K_s^{(i/c)} \tag{6}$$

$Q_{j(\ )}^{(r)}$*-обобщённый силовой фактор r –го порядка* определяется так:

$$Q_{j(F)}^{(r)} = (\overset{(r)}{\vec{F}} \cdot \vec{e}_j), \qquad Q_{j(T)}^{(r)} = (\vec{T}_k \cdot \vec{e}_j) \tag{7}$$

Здесь $\vec{e}_j$- базисные векторы касательного к R_n пространства E_n [6,7]. Отметим, что $Q_{j(F)}^{(0)} = Q_j^F$, и при r=0 уравнения движения в R_n A-форме превращаются в уравнения Аппеля [6,7].

Рассмотрим R_nL – форму уравнений движения. Согласно [3] она имеет вид:

R_nL -форма

$$\begin{cases} \hat{\Lambda}_j^{(r+1)}(K_{(r+1)}) = \lambda_p \partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j} + Q_{j(F)}^{(r)} + Q_{j(T)}^{(r)} \\ \overset{(s)}{q^j} \partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j} + W^p(t, q^j, \dots, \overset{(s-1)}{q^j}) = 0, \\ j = 1,2,\dots,n, \quad p = 1,2,\dots,m < n, \quad s = r+2, \\ r = 0 \quad if \quad k \le 1, \quad r = k\text{-}q \quad if \quad k > 1, \quad q = 1,2. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $\hat{\Lambda}_j^{r+1} = d(\partial/\partial \overset{(r+1)}{q^j})/dt - (\partial/\partial \overset{(r)}{q^j})/(r+1)$ − оператор Эйлера-Лагранжа (r+1) порядка [3]**.** Обратим также внимание на то, что при r=0 уравнения (8) становятся уравнениями Лагранжа 2-го рода.

4. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Известно, что общие теоремы играют большую роль в динамике голономных систем. Обобщения - аналоги этих теорем легко доказываются и в динамике систем с произвольными дифференциальными связями. Эти теоремы будут, по-видимому, наиболее полезными при описании программного движения твердого тела с неполными дифференциальными программами движения. Из-за ограничений на объем статьи приведем их без доказательств. Запишем теорему о движении r- центра масс (8), теоремы об изменении $\vec{P}_r$ (9) и $\vec{L}_r$ (10) - r-

ых аналогов количества движения и кинетического момента, теорему об изменении кинэты K_{r+1} (11). В обозначениях параграфа 2 они имеют вид

$$\overset{(r+2)}{\vec{x}} = \frac{1}{M}(\overset{(r)}{\vec{F}} + \overset{(r)}{\vec{R}}), \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_r = \overset{(r)}{\vec{F}} + \overset{(r)}{\vec{R}},\ \ \vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{\mathrm{x}},\ \ \vec{P}_r = M\overset{(r)}{\vec{V}}; \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_r = [\,\vec{x} \times \overset{(r)}{\vec{F}}\,] + [\,\overset{(r)}{\vec{x}} \times \overset{(r)}{\vec{R}}\,],\ \ \vec{L}_r = [\,\overset{(r)}{\vec{x}} \times \vec{P}_r];$$ (11)

$$\frac{d}{dt}K_{r+1} = N_F^{(r)} + N_R^{(r)},\ \ K_{r+1} = \frac{(M\overset{(r)}{\vec{V}})^2}{2},\ \ N_F^{(r)} = (\overset{(r)}{\vec{F}}\cdot\overset{(r)}{\vec{V}}),\ \ N_R^{(r)} = (\overset{(r)}{\vec{R}}\cdot\overset{(r)}{\vec{V}}). \tag{12}$$

Эти теоремы легко могут быть представлены в классической форме записи, которая в данной работе не приводится из–за ограничения на объем статьи.

5.ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ В ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

В динамике систем с дифференциальными связями имеет место электромеханическая аналогия, аналогичная 1-ой электромеханической аналогии классической механики. Она базируется на Постулате-Расширении Постулата Максвелла. Этот Постулат сформулируем так:

Уравнения движения управляемых электромеханических систем с неполными дифференциальными программами движения составляются в R_nL или R_nA формах.

Применительно к таким системам R_nL уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \overset{\wedge}{\Lambda}{}^{r+1}_{j} L_{(r+1)} = Q^{(r)}_{j(F)} - \partial R_{(r+1)}/\partial \overset{(r+1)}{q^j} + \lambda_{\ p}\partial f^{\,p}/\partial \overset{(k)}{q^j} + Q^{(r)}_{j(T)} \\ \overset{(s)}{q^j}\,\partial f^{\,p}/\partial \overset{(k)}{q^j} + W^{p}(t, q^j, \ldots, \overset{(s-1)}{q^j}\ ) = 0 \\ j = 1,2,\ldots,n\ ,\ \ p = 1,2,\ldots,m\ < n\ ,\ \ s\ = r+2\ , \\ r = 0\ \ if\ \ k \le 1\ ,\ \ r = k\text{-}q\ \ if\ \ k > 1\ ,\ \ q = 1,2. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $L_{(r+1)}$ и $R_{(r+1)}$ - функции Лагранжа и Релея (r+1)- го порядка – аналоги классических функции Лагранжа и Релея. Они вычисляются так:

$$L_{(r+1)} = L^{мех}_{(r+1)} + L^{эл}_{(r+1)},\quad R_{(r+1)} = R^{мех}_{(r+1)} + R^{эл}_{(r+1)}. \tag{14}$$

При этом

$$L^{мех}_{(r+1)} = K^{мех}_{(r+1)} - \Pi^{мех}_{(r)},\quad L^{эл}_{(r+1)} = K^{эл}_{(r+1)} - \Pi^{эл}_{(r)}. \tag{15}$$

Здесь $\Pi_{(r)}$ - (r) – ый аналог потенциальной энергии в таких электромеханических системах, для которых она вычисляется по формуле

$$\varPi_{(r)} = c_{ij} q_i q_i / 2 . \tag{16}$$

Тогда функции $\varPi_{(r)}$ и $R_{(r+1)}$ имеют вид:

$$\varPi_{(r)} = c_{ij} \overset{(r)}{q_i}\, \overset{(r)}{q_i} / 2, \qquad R_{(r+1)} = r_{ij} \overset{(r+1)}{q_i}\, \overset{(r+1)}{q_j} / 2 , \tag{17}$$

Здесь c_{ij}, r_{ij} - квазиупругие и диссипативные коэффициенты электромеханической системы.

Если же потенциальная энергия системы представляется в более общем виде, чем (16), то уравнения движения составляются в R_nA форме.

$$\begin{cases} \partial K_{[s]} / \partial \overset{(s)}{q^j} = Q^{(r)}_{j(\varPi)} - \partial R_{(r+1)} / \partial \overset{(r+1)}{q^j} + Q^{(r)}_{j(F)} + \lambda_p \partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j} + \; + \; Q^{(r)}_{j(T)} \\ \overset{(s)}{q^j} \partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j} + W^p (t, q^j, ..., \overset{(s-1)}{q^j}) = 0 \\ i,j = 1,2,...,n \,, \; p = 1,2,...,m < n \,, \; s = r + 2 \,, \\ r = 0 \;\; if \;\; k \le 1 \,, \; r = k\text{-}q \;\; if \;\; k > 1 \,, \; q = 1,2. \end{cases} \tag{18}$$

Здесь

$$Q^{(r)}_{j(\varPi)} = (\frac{d^{(r)}}{dt^{(r)}} (- \frac{\partial \varPi}{\partial \vec{x}}) \cdot \vec{e}_j) \tag{19}$$

Уравнения (13) и (18) адекватно описывают движение электромеханических систем с неполными дифференциальными программами движения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, отметим, что полученные нами и представленные в работе материалы является нашим вкладом в создаваемую теорию мехатронных систем с неполными произвольными дифференциальными программами движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Коренев Г.В. Введение в механику управляемого тела. - М.: Наука, 1964, 568с.

2.Добронравов В.В. Управляемые системы как системы с неголономными связями / Сб. «Механика", М.: Оборонгиз, 1961, № 104, С.27...32

3.Родионов А.И. Основания неголономной механики произвольных порядков. / Труды междунар. науч. - тех. конф. " Науч. основы высоких технологий" т.6. Математика и физика, Новосибирск, 1997, с. 62-69.

4.Родионов А.И. Уравнения движения неголономных систем высших порядков / Сб. науч. трудов НГТУ, Новосибирск, изд. НГТУ, 1997, № 2(7), с.85-96.

5.Галиулин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения. - М.: Наука,1981.

6.Добронравов В.В. Основы механики неголономных систем. - М.: Высшая школа, 1970, 269с.
7.Лурье А.И. Аналитическая механика. - М.: ГИФ-МЛ, 1961, 824с.