УДК 538.3
А.И.Родионов, В.Ф. Ким

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ И ИХ РЕШЕНИЯ

Вестник СГГА. (Физика). Выпуск 7. Новосибирск, 2002.-С.177-182

В работе рассматриваются уравнения Максвелла в различных представлениях и приводятся их решения. Это дает свежий взгляд на основные уравнения электродинамики и может явиться толчком для зарождения новых идей в области исследований электромагнитного поля.

пространственно-временное, спектральное и Фурье-де-Бройля представления уравнений Максвелла, Уравнения Максвелла в формах "Хевисайда-Герца", "Шредингера-Дирака-Вейля", "Дирака-Гамильтона".

ВВЕДЕНИЕ

Время от времени в науке возникает такая ситуация, когда по ряду внутренних или внешних причин начинают вновь обсуждаться, казалось бы, хорошо сложившиеся и установившиеся понятия. Известно, что уравнения Максвелла и законы Ньютона являются основой всех технических решений человечества. И на сегодняшний день вряд ли найдется хотя бы один разумный человек в мире, кто бы оспаривал их справедливость, разумеется, в области их применимости. Тем не менее, целесообразно временами возвращаться к обсуждению эти фундаментальных уравнений и законов, чтобы лучше уяснить те глубокие идеи, которые заложены в них. Ибо опыт науки постоянно говорит нам о том, что Уравнения, Теоремы, Принципы и Законы гораздо “умнее” их открывателей.

В настоящей работе обсуждаются несколько различных представлений уравнений Максвелла и приводятся их решения.

1. Уравнения Максвелла в "$\vec{k}-\omega$" спектральном представлении и их решения в квадратурах

Запишем симметричные уравнения Максвелла в однородной среде в пространственно - временном представлении [1]:

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial\overleftarrow{H}}{\partial t} - \dfrac{4\pi}{c}\overleftarrow{j}^{m} \\ \nabla\times\overleftarrow{H} = +\dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}^{e}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{4\pi\rho^{e}}{\varepsilon} \\ \nabla\cdot\overleftarrow{H} = \dfrac{4\pi\rho^{m}}{\mu}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\rho^{e}}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j}^{e} = 0 \\ \dfrac{\partial\rho^{m}}{\partial t} + \nabla\cdot\overleftarrow{j}^{m} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\vec{E}, \vec{j}^{e}, \rho^{e}, \varepsilon$ - электрические напряженность поля, плотность тока, плотность зарядов и проницаемость среды; $\overleftarrow{H}, \overleftarrow{j}^{m}, \rho^{m}, \mu$ - магнитные напряженность поля, плотность тока, плотность зарядов и проницаемость среды; c - скорость света, ∇ - дифференциальный оператор "набла". Первые две пары уравнений – собственно уравнения Максвелла, третья пара уравнений – законы сохранения электрического и магнитных зарядов – уравнения непрерывности.

Рассмотрим электромагнитные поля, возбуждаемые произвольной системой электрических и магнитных токов и зарядов. Известно, что в X-пространстве связь между полями и токами определяется интегро-дифференциальными соотношениями, как, например, в известных формулах Стрэттона-Чу [1]. Однако если перейти в K-пространство волновых векторов $\vec{k}$, то, как показано в наших работах [2,3], можно получить связь между полями и токами локального характера. Это позволяет получить решение Уравнений Максвелла в квадратурах без привлечения волновых уравнений.

Осуществим пространственно-временное преобразование Фурье всякой векторной и скалярной функции поля $f(\vec{x},t)$:

$$f_{k\omega}(\vec{k},\omega)=\int d^3x\cdot e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x})}\int dt\cdot e^{i(\omega\cdot t)}\cdot f(\vec{x},t), \tag{2}$$

Тогда найдем, что

$$\begin{cases}[i\vec{k}\times\vec{E}_{k\omega}]=+\dfrac{i\omega\mu}{c}\vec{H}_{k\omega}-\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,m}_{k\omega}\\[2mm] [i\vec{k}\times\vec{H}_{k\omega}]=-\dfrac{i\omega\varepsilon}{c}\vec{E}_{k\omega}+\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,e}_{k\omega},\end{cases}\begin{cases}(i\vec{k}\cdot\vec{E}_{k\omega})=\dfrac{4\pi\rho^e_{k\omega}}{\varepsilon}\\[2mm] (i\vec{k}\cdot\vec{H}_{k\omega})=\dfrac{4\pi\rho^m_{k\omega}}{\mu},\end{cases}\begin{cases}i\omega\rho^e_{k\omega}-(i\vec{k}\cdot\vec{j}^{\,e}_{k\omega})=0\\ i\omega\rho^m_{k\omega}-(i\vec{k}\cdot\vec{j}^{\,m}_{k\omega})=0.\end{cases} \tag{3}$$

После исключения зарядов с помощью уравнений непрерывности мы приходим к уравнениям Максвелла в "$k-\omega$" - представлении

$$\begin{cases}[i\vec{k}\times\vec{E}_{k\omega}]=+\dfrac{i\omega\mu}{c}\vec{H}_{k\omega}-\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,m}_{k\omega}\\[2mm] [i\vec{k}\times\vec{H}_{k\omega}]=-\dfrac{i\omega\varepsilon}{c}\vec{E}_{k\omega}+\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,e}_{k\omega},\end{cases}\qquad\begin{cases}(i\vec{k}\cdot\vec{E}_{k\omega})=\dfrac{4\pi}{i\omega\varepsilon}\cdot(i\vec{k}\cdot\vec{j}^{\,e}_{k\omega})\\[2mm] (i\vec{k}\cdot\vec{H}_{k\omega})=\dfrac{4\pi}{i\omega\mu}\cdot(i\vec{k}\cdot\vec{j}^{\,m}_{k\omega}),\end{cases} \tag{4}$$

Эти уравнения являются локальными алгебраическими уравнениями, которые допускают простое решение. Выразим из первой группы уравнений поля $\vec{E}_{k\omega},\vec{H}_{k\omega}$, затем умножим волновой вектор $\vec{k}$ векторно на эти поля. Тогда произойдет разделение уравнений для полей $\vec{E}_{k\omega},\vec{H}_{k\omega}$:

$$\begin{cases}[\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{E}_{k\omega}]]-\dfrac{4\pi}{c}[i\vec{k}\times\vec{j}^{\,m}_{k\omega}]=-\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\vec{E}_{k\omega}-\dfrac{4\pi}{c^2}i\omega\mu\cdot\vec{j}^{\,e}_{k\omega}\\[2mm] [\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{H}_{k\omega}]]+\dfrac{4\pi}{c}[i\vec{k}\times\vec{j}^{\,e}_{k\omega}]=-\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\vec{H}_{k\omega}-\dfrac{4\pi}{c^2}i\omega\varepsilon\cdot\vec{j}^{\,m}_{k\omega}\end{cases} \tag{5}$$

Отсюда определяем связь полей с возбуждающими их токами:

$$
\begin{cases}
\vec{E}_{k\omega} = \dfrac{4\pi c}{\omega^2 \varepsilon\mu - k^2 c^2} \cdot \left(\dfrac{c}{i\omega\varepsilon} \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu \cdot \vec{j}^{\,e}_{k\omega} - \vec{k} \cdot (\vec{k} \cdot \vec{j}^{\,e}_{k\omega}) \right) + [i\vec{k} \times \overleftarrow{j}^{\,m}_{k\omega}] \right) \\
\overleftarrow{H}_{k\omega} = \dfrac{4\pi c}{\omega^2 \varepsilon\mu - k^2 c^2} \cdot \left(\dfrac{c}{i\omega\mu} \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu \cdot \overleftarrow{j}^{\,m}_{k\omega} - \vec{k} \cdot (\vec{k} \cdot \overleftarrow{j}^{\,m}_{k\omega}) \right) - [i\vec{k} \times \vec{j}^{\,e}_{k\omega}] \right)
\end{cases}
\tag{6}
$$

С учетом этого, получим решения уравнений Максвелла в квадратурах для переменных полей в однородной среде, возбуждаемых произвольной системой электрических и магнитных токов:

$$
\begin{cases}
\vec{E}(\vec{x},t) = \dfrac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x})} \int d\omega \cdot e^{-i(\omega\cdot t)} \cdot \vec{E}_{k\omega}(\vec{k},\omega) \\
\overleftarrow{H}(\vec{x},t) = \dfrac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x})} \int d\omega \cdot e^{-i(\omega\cdot t)} \cdot \overleftarrow{H}_{k\omega}(\vec{k},\omega)
\end{cases}
\tag{7}
$$

Обратим внимание на то, что решения (7) найдены без привлечения волновых уравнений – дифференциальных уравнений второго порядка. Записанные решения содержат как запаздывающие, так и опережающие компоненты. Это указывает на то, что причина возникновения опережающего решения таится не в волновых уравнениях, а в самих уравнениях Максвелла. Исключение опережающих решений произойдет при интегрировании, когда путем аналитического продолжения интегрирование будет перенесено на комплексное пространство волновых векторов и придется выбирать "правильный" путь интегрирования при обходе особенностей интегралов.

2. Уравнения Максвелла для шестивекторов поля

Уравнения поля могут быть записаны в компактной форме, если ввести следующие матричные дифференциальные операторы и новые объекты поля:

$$
\hat{M} = \begin{pmatrix} -\partial / c\partial t & rot \\ -rot & -\partial / c\partial t \end{pmatrix},\ \hat{D} = \begin{pmatrix} div & 0 \\ 0 & div \end{pmatrix},\ \overleftrightarrow{\Im} = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \overleftarrow{H} \end{pmatrix},\ \overleftrightarrow{\aleph} = \begin{pmatrix} \vec{j}^{\,e} \\ \overleftarrow{j}^{\,m} \end{pmatrix},\ \Re = \begin{pmatrix} \rho^e \\ \rho^m \end{pmatrix}
\tag{8}
$$

Тогда, например, для электромагнитного поля в вакууме, возбуждаемого токами и зарядами, можно получить запись уравнений поля в виде

$$
\hat{M} \cdot \overleftrightarrow{\Im} = \frac{4\pi}{c} \overleftrightarrow{\aleph}, \qquad \hat{D} \cdot \overleftrightarrow{\Im} = 4\pi\Re, \qquad \frac{\partial \Re}{\partial t} + \hat{D} \cdot \overleftrightarrow{\aleph} = 0
\tag{9}
$$

Однако эта форма уравнений требует дополнительного изучения. И, возможно, что такое "переписывание" исходных уравнений Максвелла не несет ничего нового, кроме компактности формы. Так это, или не так, покажут дальнейшие исследования.

3. Уравнения Максвелла в классической форме "Хевисайда-Герца", записанные через векторы Крамерса

Отметим, что весьма плодотворна идея объединения электрической и магнитной составляющих поля в комплексные объекты

$$\begin{cases}\vec{F} = \vec{E} + i\cdot\vec{H} \\ \vec{G} = \vec{E} - i\cdot\vec{H},\end{cases} \qquad \begin{cases}\vec{J} = \vec{j}^{\,e} + i\cdot\vec{j}^{\,m} \\ \vec{I} = \vec{j}^{\,e} - i\cdot\vec{j}^{\,m},\end{cases} \qquad \begin{cases}\rho = \rho^{e} + i\cdot\rho^{m} \\ \eta = \rho^{e} - i\cdot\rho^{m}.\end{cases} \tag{10}$$

Здесь $\vec{F}$ и $\vec{G}$ - векторы Крамерса [3,4].
Уравнения поля принимают классическую форму "Хевисайда-Герца":

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{F} = +\dfrac{i}{c}\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial t} + i\dfrac{4\pi}{c}\vec{J} \\ \nabla\times\vec{G} = -i\dfrac{\partial\vec{G}}{\partial t} - i\dfrac{4\pi}{c}\vec{I},\end{cases} \qquad \begin{cases}\nabla\cdot\vec{F} = 4\pi\rho \\ \nabla\cdot\vec{G} = 4\pi\eta,\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0 \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{I} = 0.\end{cases} \tag{11}$$

В спектральном "$k-\omega$" представлении решения уравнений поля (11) можно получить процедурой, аналогичной той, с помощью которой получены выражения (6). В результате находим:

$$\begin{cases}\vec{F}_{k\omega} = \dfrac{4\pi i c}{\omega^2 - k^2c^2}\cdot\left(\dfrac{c}{\omega}(\vec{k}\cdot(\vec{k}\cdot\vec{J}_{k\omega}) - \dfrac{\omega^2}{c^2}\vec{J}_{k\omega}) - [i\vec{k}\times\vec{J}_{k\omega}]\right) \\ \vec{G}_{k\omega} = \dfrac{4\pi i c}{\omega^2 - k^2c^2}\cdot\left(\dfrac{c}{\omega}(\vec{k}\cdot(\vec{k}\cdot\vec{I}_{k\omega}) - \dfrac{\omega^2}{c^2}\vec{I}_{k\omega}) + [i\vec{k}\times\vec{I}_{k\omega}]\right)\end{cases} \tag{12}$$

Заметим, что

$$(\vec{F}^*\cdot\vec{F}) = \vec{E}^2 + \vec{H}^2 = 8\pi\cdot w, \quad [\vec{F}^*\times\vec{F}] = -2i\cdot[\vec{E}\times\vec{H}] = 8\pi i c\cdot\vec{g}, \tag{13а}$$

$$(\vec{F}\cdot\vec{F}) = (\vec{E}^2 - \vec{H}^2) + 2i\cdot(\vec{E}\cdot\vec{H}) = \text{invar} \tag{13б}$$

w и $\vec{g}$ - плотность энергии и плотность импульса электромагнитного поля. Аналогичные выражения можно записать через функцию поля $\vec{G}$.

4. Уравнения Максвелла в форме уравнений типа " Дирака-Вейля" со спином 1

Покажем, что уравнения Максвелла можно непосредственно переписать в квантовомеханической форме. Для этого надо заметить следующее. Скаляру φ, вектору φ_α, тензорам $\varphi_{\alpha\beta}$ и $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$ можно сопоставить дуальные объекты [5], которые конструируются с помощью совершенно антисимметричного псевдотензора 3-го ранга $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$: $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi$, $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}\varphi_{\gamma} / 1!$, $\tilde{\varphi}_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi_{\beta\gamma} / 2!$, $\tilde{\varphi} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi_{\alpha\beta\gamma} / 3!$ (здесь принято тензорное правило суммирования по повторяющимся индексам $\alpha, \beta = 1,2,3$). Например, вектору напряженности магнитного поля $\vec{H}$ сопоставляется антисимметричный тензор $\tilde{H}_{\alpha\beta}$, а дифференциальному оператору ∇ сопоставляется антисимметричный дифференциальный тензор $\tilde{\nabla}_{\alpha\beta}$:

$$\tilde{H}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & +H_z & -H_y \\ -H_z & 0 & +H_x \\ +H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{\nabla}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & +\nabla_z & -\nabla_y \\ -\nabla_z & 0 & +\nabla_x \\ +\nabla_y & -\nabla_x & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

(тензор $\tilde{H}_{\alpha\beta}$ является элементом тензора электромагнитного поля). При этом произведения $[\vec{H} \times \vec{F}]$ и $[\nabla \times \vec{F}]$ получают следующее представление:

$$[\vec{H} \times \vec{F}] = -\tilde{H}\vec{F}, \qquad [\nabla \times \vec{F}] = -\tilde{\nabla}\vec{F} \tag{15}$$

Вместе с тем, всякий антисимметричный тензор 3-го ранга может быть разложен по системе трех спиновых матриц для частиц со спином 1 [4]:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Теперь для антисимметричного дифференциального тензора $\tilde{\nabla}_{\alpha\beta}$ мы находим новое представление:

$$\tilde{\nabla} = i(\hat{\sigma} \cdot \nabla) = -\frac{1}{\hbar}(\hat{\sigma} \cdot \hat{p}), \quad \text{при этом} \quad [\nabla \times \vec{F}] = \frac{1}{\hbar}(\hat{\sigma} \cdot \hat{p})\vec{F}, \tag{17}$$

где $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ - оператор импульса. Введя, наряду с оператором импульса, также оператор энергии $\hat{\varepsilon} = i\hbar\partial / \partial t$, уравнения поля (11) можно переписать в форме уравнений типа "Дирака-Вейля" со спином 1.

$$\begin{cases} \{c(\hat{\sigma} \cdot \hat{p}) - \hat{\varepsilon}\}\,\vec{F} = +i\hbar 4\pi \vec{J} \\ \{c(\hat{\sigma} \cdot \hat{p}) + \hat{\varepsilon}\}\,\vec{G} = -i\hbar 4\pi \vec{I}, \end{cases} \quad \begin{cases} (\hat{p} \cdot \vec{F}) = -i\hbar 4\pi\rho \\ (\hat{p} \cdot \vec{G}) = -i\hbar 4\pi\eta, \end{cases} \quad \begin{cases} (\hat{p} \cdot \vec{J}) = \hat{\varepsilon}\,\rho \\ (\hat{p} \cdot \vec{I}) = \hat{\varepsilon}\,\eta. \end{cases} \tag{18}$$

Аналогичные уравнения, только для частного случая свободного пространства, впервые, по-видимому, были получены Арчибальдом в [6] и независимо от него в нашей работе [7].

Если перейти к представлению "Фурье-де-Бройля":

$$f_{p\varepsilon}(\vec{p}, \varepsilon) = \int d^3p \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x})} \int e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon \cdot t)} f(\vec{x}, t) d\varepsilon \tag{19}$$

то можно найти, что решениями уравнений поля являются выражения:

$$\vec{F}(\vec{x},t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p\cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x})})\int d\varepsilon\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(\varepsilon\cdot t)}\frac{2ic}{\varepsilon^2-p^2c^2}\left(\frac{c}{\varepsilon}\left(\vec{p}\cdot(\vec{p}\cdot\vec{J}_{p\varepsilon})-\frac{\varepsilon^2}{c^2}\vec{J}_{p\varepsilon}\right)-(\hat{\sigma}\cdot\hat{p})\vec{J}_{p\varepsilon}\right) \quad (20)$$

$$\vec{G}(\vec{x},t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p\cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x})}\int d\varepsilon\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(\varepsilon\cdot t)}\frac{2ic}{\varepsilon^2-p^2c^2}\left(\frac{c}{\varepsilon}\left(\vec{p}\cdot(\vec{p}\cdot\vec{I}_{p\varepsilon})-\frac{\varepsilon^2}{c^2}\vec{I}_{p\varepsilon}\right)+(\hat{\sigma}\cdot\hat{p})\vec{I}_{p\varepsilon}\right) \quad (21)$$

5. Уравнения Максвелла в форме "Дирака-Гамильтона"

Еще одно представлений уравнений поля можно получить, если ввести комплексные шестивекторы и оператор поля

$$\hat{H}=\begin{pmatrix} c(\hat{\sigma}\cdot\hat{p}) & 0 \\ 0 & -c(\hat{\sigma}\cdot\hat{p})\end{pmatrix};\qquad \vec{\Pi}=\begin{pmatrix}\vec{F}\\ \vec{G}\end{pmatrix};\qquad \vec{Q}=\begin{pmatrix}\vec{J}\\ \vec{I}\end{pmatrix};\qquad e=\begin{pmatrix}\rho\\ \eta\end{pmatrix} \qquad (22)$$

$$\{\hat{H}-\hat{\varepsilon}\}\cdot\vec{\Pi}=i\hbar 4\pi\,\vec{Q},\qquad (\hat{p}\cdot\vec{\Pi})=-i\hbar 4\pi\, e,\qquad (\hat{p}\cdot\vec{Q})=\hat{\varepsilon}\, e \qquad (23)$$

Эту форму уравнений Максвелла можно назвать формой "Дирака-Гамильтона". Она также требует дальнейшего исследования.

6. Уравнения Максвелла и фотоны. Фотон – это квант или объект?

Вернемся к уравнениям Максвелла в форме Дирака-Вейля. Рассмотрим электромагнитное поле в свободном пространстве

$$\begin{cases} c(\hat{\sigma}\cdot\hat{p})\vec{F}=+i\hbar\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial t} \\ c(\hat{\sigma}\cdot\hat{p})\vec{G}=-i\hbar\dfrac{\partial\vec{G}}{\partial t}, \end{cases}\qquad \begin{cases}(\hat{p}\cdot\vec{F})=0\\ (\hat{p}\cdot\vec{G})=0,\end{cases} \qquad (24)$$

По форме уравнение для поля $\vec{F}$ аналогично уравнению для компонент волновой функции фотона со спиральностью $\nu=1$ (правая поляризация), а уравнение для поля $\vec{G}$ аналогично уравнению для компонент волновой функции фотона со спиральностью $\nu=-1$ (левая поляризация) [4]. Это говорит о возможности пересмотреть вопрос о волновой функции фотона, так как согласно [8,9] волновая функция в X - представлении не существует. Однако это уже предмет отдельной публикации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что полученные результаты вносят свежий взгляд на уравнения Максвелла и могут дать толчок ноавым идеям в области исследований электромагнитного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. – М: ГИТТЛ, 1948. – 423 с.
2. Кемпфер Ф. Основные положения квантовой механики. – М.: Мир, 1967. – 391 с.
3. Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М. Теория поля. – М: Наука, 1967.- 460 с.
4. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. – М: Наука, 1969. - 624 с.
5. Archibald W.J. Field equations from particle equations. // Canadian Journ. Phys., Halifax. –1955. - V.33. - P. 565 - 574.
6. Коняшенко Е.А., Шмыков В.Н. Спектральное представление электромагнитного поля произвольного распределения токов // Радиотехника и электроника-1987-Т.32-№4, с.681-686.
7. Коняшенко Е.А., Спектральный анализ диапазонных свойств плоских секториальных излучателей // Радиотехника и электроника-1992-Т.37-№3, с.423-432.
8. Ким В.Ф., Руденко В.Н. Энергетические функционалы некомпланарной системы плоских поверхностных токов // Изв. Вузов. Физика. – т.37.-№4.- с.122-124.